2004 2点吊り振子の3つのmode間非線形相互作用の解析と線形振動実験

An Analysis of Nonlinear Mode Coupling in Three Modes of Bifilar Suspension Pendulum and Experiments of Linear Oscillations

○正 舟田 敏雄 (沼津高専), 学 木ノ内 智貴 (沼津高専), 学 桜井 賢人 (沼津高専), 正 宮内 太積 (沼津高専), 望月 孔二 (沼津高専), 正 大庭 勝久 (沼津高専), 青木 悠祐 (沼津高専)

Toshio FUNADA, Toshiki KINOUCHI, Kento SAKURAI, Tatsumi MIYAUCHI, Kouji MOCHIZUKI, Katsuhisa OHBA, Yusuke AOKI
Numazu National College of Technology, Ooka 3600, Numazu, Shizuoka, 410-8501

A bifilar suspension pendulum, a uniform density bar suspended at its two points by two strings of same length, may swing in a vertical plane or make torsional oscillation about a vertical axis. The swinging in a co-plane of the strings and the bar is called Mode 1, and the swinging in a vertical plane perpendicular to the bar is Mode 2. Mode 3 is the torsional oscillation about a vertical axis. These modes are linearly independent of each other, but it is possible to make nonlinear coupling oscillation between the modes and internal resonance. In order to treat such coupling systematically, the formulation of the problems is made on two spherical coordinates systems and equations of motion for the three modes are derived. Linear oscillations are examined for the three modes based on experiments to solve nonlinear coupling.

Keywords: Bifilar Suspension Pendulum, Coupling of Three Oscillation Modes, Internal Resonance

1 はじめに

対称 2点吊り振子 (並進振子) を免震床に応用するための検討^[1]に刺激されて, 2点吊り振子の静止平衡状態周りの振子運動について, 運動方程式を導出して初期値問題を数値解析し, 実験を行った (Fig.1, Table 1)^{[2],[3]}. その振子運動には, 紐と円木の成す鉛直面内で揺れる “mode 1 (遊動円木 mode)” とそれに垂直な鉛直面内で揺れる “mode 2 (ブランコ mode)” があり, 鉛直軸回りの円木の振動は, “mode 3 (捩れ振動 mode)” に分類される.

本報告では, 各振動 mode の実験値と線形振動理論値の比較結果 (Fig.2)^[3]に基づき, 球座標系を用いた 3つの振動 mode の表現により, 線形共振/弱非線形内部共振の解析を試みる.

Fig.1 Experimental apparatus for the bifilar suspension pendulum with a bar of $m_1 = 0.6659$ kg and length $2b = 0.899$ m in $a > c$. When $a = c$, the bar swings horizontally as a part of parallelogram.

Table 1 Specification of the apparatus (Fig.1), a bar of length $2b$ and $m = 0.6659$ kg suspended by two ropes of length L at two points which are distant by a from the center.

a [m]	0.26	b [m]	0.4495
c [m]	0.0875, 0.1625, 0.2375, 0.3125, 0.3875, 0.4625, 0.5375		
L [m]	0.443, 0.542, 0.648

Fig.2 Period T versus c for mode 1 (solid line), 2 (dotted), 3 (dashed). $L = 0.443$ (below), $L = 0.542$ (middle), and $L = 0.648$ (above). Marks are (c, T_e) for experimental T_e .

3つのmodeの線形振動解析により, mode 1, 2の固有角振動数

が一致する条件より $c = a$, $c = b^2/(3a)$ が得られる. 一方, 先の実験結果 (Fig.2) では $b = 0.4495$, $a = 0.26$ なので, $c = a = 0.26$ で mode 1, 2の固有角振動数が一致し, $c = b^2/(3a) = 0.259039$ で 3つのmodeの固有角振動数が一致することが理論的に示される. 実験では $c \sim a$ で 3つの共振点と推定されたが, それは理論的に確認された. ここでは, 非線形連成振動の解析に向け, 様々な連成振動の可能性を線形理論に基づき個々に論ずる.

2 2点吊り振子の3つの振動modeの球座標系表現

水平右手方向に x 軸, 水平手前方向に y 軸, 鉛直下方向に z 軸とするデカルト座標系 (x, y, z) を用い, Fig.3 に示すように, C_1 点を起点に 2点吊り振子の配置を記述する.

Fig.3 Bifilar suspension pendulum with $c > a$ (mode 1).

球座標系を併用し, 座標原点は適宜取るものとする. 水平な上壁面上に C_1 点 (x_0, y_0, z_0) を取り, 間隔 c_1 で, O 点 $(x_0 + c_1, y_0, z_0)$, C_2 点 $(x_0 + 2c_1, y_0, z_0)$ を取る. 遊動円木の中央 (質量中心) を G 点 (x_g, y_g, z_g) とし, G 点から間隔 a_1 で, 遊動円木上の左の紐の結び目位置を A_1 点 (x_1, y_1, z_1) , 右の紐の結び目位置を A_2 点 (x_2, y_2, z_2) と表す. 回転角をデカルト座標系の軸回りに取って軸名の添え字を付け, O 点を原点とする球座標系 (r, θ_y, θ_z) を用い, z - x 面内で鉛直軸から反時計回りに θ_{yg} , y - z 面内で鉛直軸から反時計回りに θ_{xg} を取り, G 点の座標 (x_g, y_g, z_g) は次式で表される:

$$x_g = r_g \sin(\theta_{yg}) + x_0 + c_1, \quad y_g = r_g \cos(\theta_{yg}) \sin(\theta_{xg}) + y_0,$$

$$z_g = r_g \cos(\theta_{yg}) \cos(\theta_{xg}) + z_0 \quad (2.1)$$

また, G 点を原点とする球座標系を用いて, z - x 面内で鉛直軸から反時計回りに θ_y , x - y 面内で鉛直軸から反時計回りに θ_z を取り, A_1 点の座標 (x_1, y_1, z_1) と A_2 点の座標 (x_2, y_2, z_2) は次式で表される:

$$x_1 = x_g - a_1 \cos(\theta_y) \cos(\theta_z), \quad y_1 = y_g - a_1 \cos(\theta_y) \sin(\theta_z),$$

$$z_1 = z_g + a_1 \sin(\theta_y) \quad (2.2)$$

$$x_2 = x_g + a_1 \cos(\theta_y) \cos(\theta_z), \quad y_2 = y_g + a_1 \cos(\theta_y) \sin(\theta_z),$$

$$z_2 = z_g - a_1 \sin(\theta_y) \quad (2.3)$$

紐の長さが等しく ($L_2 = L_1$) 一定であるとし, $\overline{A_1 A_2} = 2a_1$ は $f_0 = 0$, $\overline{A_1 C_1} = L_1$ は $f_1 = 0$, $\overline{A_2 C_2} = L_2$ は $f_2 = 0$ で表される. 水平面からの遊動円木の傾き角の関係式が求められる. f_1 ,

f_2 の和を取ると, r_g を θ_y, θ_z で表現する式が得られる:

$$f_1 + f_2 = 0 \rightarrow r_g = \sqrt{L_1^2 - (a_1^2 + c_1^2 - 2a_1c_1 \cos(\theta_y) \cos(\theta_z))} \equiv r_{g1}(\theta_y, \theta_z) \quad (2.4)$$

f_1, f_2 の差を取ると角度の関係式が得られ, θ_y を個別の振動 mode を記述する変数 $\theta_{xg}, \theta_{yg}, \theta_z$ で表現できる:

$$f_1 - f_2 \rightarrow \theta_y = \arcsin(d_{11}/c_{11}) - \arcsin(b_{11}/c_{11}) \equiv \theta_{y1}(\theta_{xg}, \theta_{yg}, \theta_z) \quad (2.5)$$

但し, $a_{11}-d_{11}$ は次のように定義した:

$$\begin{cases} a_{11} = \cos(\theta_{xg}) \cos(\theta_{yg}), \\ b_{11} = -\cos(\theta_z) \sin(\theta_{yg}) - \cos(\theta_{yg}) \sin(\theta_{xg}) \sin(\theta_z), \\ c_{11} = \sqrt{a_{11}^2 + b_{11}^2}, \quad d_{11} = -\frac{c_1}{a_1} \sin(\theta_{yg}) \end{cases} \quad (2.6)$$

この系の静止平衡状態は, 5 つの時間の関数を用いて記述されて $(r_g, \theta_{xg}, \theta_{yg}, \theta_y, \theta_z) = (r_{g0}, 0, 0, 0, 0)$ と表される. 但し, r_{g0} は次式で定義される:

$$r_{g0} = \sqrt{L_1^2 - (a_1 - c_1)^2} \quad (2.7)$$

静止平衡状態の回りで攪乱に対して (2.4), (2.5) 式を Taylor 展開し, 微小 parameter ϵ ($\epsilon \ll 1$) を用いて攪乱を $\epsilon\theta_{yg}, \epsilon\theta_{xg}, \epsilon\theta_z$ と表すと, θ_y, r_g は次のように近似される:

$$\theta_y \approx \theta_{y1}(\theta_{xg}, \theta_{yg}, \theta_z) = \theta_{y1}, \quad (2.8)$$

$$r_g \approx r_{g1}(\theta_{y1}(\theta_{xg}, \theta_{yg}, \theta_z), \theta_z) \quad (2.9)$$

つまり, (2.9) 式の r_g には (2.8) 式を代入して項を整理し, $O(\epsilon^4)$ まで取るものとする.

以上の表式を用いて, 質量 m_1 , 慣性 moment J_y, J_z ($= J_y = m_1 b_1^2/3$) の遊動円木の運動を記述する Lagrange 関数 $\mathcal{L}$ は, 次のように表される:

$$\mathcal{L} = \frac{m_1}{2} (\dot{x}_g^2 + \dot{y}_g^2 + \dot{z}_g^2) + \frac{J_y}{2} \dot{\theta}_y^2 + \frac{J_z}{2} \dot{\theta}_z^2 + m_1 g z_g \quad (2.10)$$

ここでは, C_1 点の座標が時間の関数となる場合も含まれている. C_1 点が固定の場合には, $x_0 = 0, y_0 = 0, z_0 = 0$ である. ここで, 時間の未知関数は $r_g = r_{g1}(\theta_{y1}(\theta_{xg}, \theta_{yg}, \theta_z), \theta_z)$, θ_{xg}, θ_{yg} , $\theta_y = \theta_{y1}(\theta_{xg}, \theta_{yg}, \theta_z)$, θ_z であり, 束縛条件 f_1, f_2 により, 運動を記述する上で基本となる変数 (未知関数) は 3 つである. この一般関係式に基づき, 3 つの振動の非線形連成振動系の運動方程

Fig.4a {0.648,0.2375,0.26,0.26,0.0866667}.

Fig.4b {0.443,0.2375,0.065,0.4495,1.0362}.

Fig.4c {0.542,0.2375,1.04,0.4495,0.06476}.

Fig.4a の mode 1 (赤色) と mode 2 (黒色破線) は, 先の実験値 (Fig.2) に比べ, 棒が短くなったため慣性 moment が小さくなり, 周期の値の差が大きくなっている. 従って, mode 1 の周期の倍が mode 2 の周期となる c_1 の配置がある. また, mode 3 (赤紫色) の周期は, c_1 に対する変化率が大きく, ほかの周期の 1/2, 1/3 となる c_1 の配置がある. このような視点で, Fig.4b,4c の振動の特性を分析できる. 各 mode の振動周期が 2 点吊り振子の設定条件により大きく変化することに注目されたい. 以上の図中で, 曲線の交点は共振点にあたるが, 線形振動では互いに独立であるので, 交点の近傍で弱非線形の連成振動が起こるものと思われる. また, 各 mode の周期の倍数あるいは分数の曲線で交点が生じ得る. それらも, 非線形連成振動の候補である.

3 おわりに

本報告では, 球座標系を用いた統一的表現に改め, 非線形連成振動等の解析に向けて準備した. 先の線形振動で得られた分散関係式と関連する表式は, いずれも新たな表現と一致することが確認された. これに基づき, 非線形連成振動等を扱うことになる. 本報告の結果を基に, 主共振, 高調波/分数調波の連成振動等につい

式を導出でき, 3 つの振動の統一的表現が得られる. それに先立ち, 系の個々の振動 mode の記述との関連を調べる.

■遊動円木 mode この振動 mode は z - x 面内で起こるので, 線形化運動方程式の解 $\theta_{yg}(t)$ は調和振動を表し, 固有角振動数 ω_{01} は次のように表される:

$$\omega_{01} = \sqrt{\frac{m_1 g (r_{g0}^2 + (a_1 - c_1)^2 c_1 / a_1)}{r_{g0} ((1 - c_1 / a_1)^2 J_y + m_1 r_{g0}^2)}} \quad (2.11)$$

■ブランコ mode この振動 mode は y - z 面内で起こるので, 線形化運動方程式の解 $\theta_{xg}(t)$ は調和振動を表し, 固有角振動数 ω_{02} は次のように表される:

$$\omega_{02} = \sqrt{g / r_{g0}} \quad (2.12)$$

これより, $c = a$ のとき r_{g0} が最大値となる.

■揺れ振動 mode この振動 mode は x - z 面内で起こり, 線形化運動方程式の解 $\theta_z(t)$ は調和振動を表し, 固有角振動数 ω_{03} は次のように表される:

$$\omega_{03} = \sqrt{m_1 g a_1 c_1 / (J_z r_{g0})} \quad (2.13)$$

これより, $c = a$ のとき r_{g0} が最大値となる.

■連成振動の条件 (2.11), (2.12), (2.13) 式より, $\omega_{01}^2 = \omega_{02}^2$ は整理して分母を払うと c_1 の 3 次代数方程式になり, 根 $c_1 = a_1$ (重根), $c_1 = b_1^2 / (3a_1)$ を得る. (2.12), (2.13) 式より, $\omega_{02}^2 = \omega_{03}^2$ は c_1 の 1 次代数方程式になり, 根 $c_1 = b_1^2 / (3a_1)$ を得る. (2.13), (2.11) 式より, $\omega_{03}^2 = \omega_{01}^2$ は c_1 の 1 次代数方程式になり, 根 $c_1 = b_1^2 / (3a_1)$ を得る. 換言すると, $c_1 = a_1$ (並進 2 点吊り振子) の場合には mode 1, 2 の固有角振動数が一致し, $c_1 = b_1^2 / (3a_1)$ の場合には 3 つの mode の固有角振動数が一致する. さらに, 有利数 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ を用いて, 次の方程式を作り, c_1 あるいは b_1 の代数方程式として解くことができ, α_1 の値を変えて高調波/分数調波の発生を調べることができる:

$$\omega_{01}^2 = \alpha_1^2 \omega_{02}^2, \quad \omega_{02}^2 = \alpha_1^2 \omega_{03}^2, \quad \omega_{03}^2 = \alpha_1^2 \omega_{01}^2 \quad (2.14)$$

■個別振動解析による実験結果の分析 木片による様々な実験条件 $\{L_1, c_1, a_1, b_1, \frac{b_1^2}{3a_1}\}$ の値を伴い, 振動周期 (縦軸) と c_1 (横軸) の関係の特徴的な例を Fig.4a-4c に示す.

て数値解析並びに多重尺度法による解析等に取り組む予定である.

参考文献

- [1] 川口 衛, 立道 郁生: “21318 並進振子原理を用いた免震システムの開発: その 1 原理と免震床の実大実験” 学術講演梗概集. B-2, 構造 II, 振動, 原子力プラント 2000 (2000), pp.635-636(社団法人日本建築学会).
- [2] 望月 孔二, 宮内 太積, 舟田 敏雄, 佐々木 隆吾, マズニ アルイルファン, 川船 雄一郎, 川上 誠, 中道 義之: “2 点吊り振子の線形運動解析” 沼津高専研究報告 第 44 号 (2010), pp.55-60.
- [3] 舟田 敏雄, 宮内 太積, 大庭 勝久, 中道 義之, 青木 悠祐, 出川 智啓, 望月 孔二: “2 点吊り振子の連成振動と内部共振の数値解析” 日本機械学会 2011 年度年次大会, 2011 年 9 月 11 日 (日)~15 日 (木), 東京工業大学 大岡山キャンパス, [OS] G100 機械力学・計測制御部門 9 月 13 日 (火) 9:00-10:00 会場: W242, 講演番号 G100033. 日本機械学会 2011 年度年次大会 講演論文集 DVDROM G100033.pdf.