402 階層型領域分割法による大規模並列熱伝導解析

正 塩谷 隆二 (九州大), 正 金山 寛 (九州大), 〇学 石川 格 (九州大)

Parallel Computing of Large Scale Heat Conductive Problems by Hierarchical Domain Decomposition Method

Ryuji SHIOYA, Hiroshi KANAYAMA and Itaru ISHIKAWA

Kyushu University, Hakozaki 6-10-1, Higashi-ku Fukuoka

Key Words: Iterative Domain Decomposition, Parallel Computing, Finite Element Method, Heat Conductive Problem

1. 概 要

今日, 計算機による解析は高精度の解析結果に対する要求などから, より大規模なモデルに対する解析が求められるようになってきている。しかし, 単一プロセッサでの処理は限界に近づきつつあり, 今後これ以上の計算速度を達成するためには, 多重プロセッサによる並列処理が必要不可欠である [1]。

大規模問題を並列計算により効率良く解析するための数値解析手法としては領域分割法が良く知られており, 特に超大規模の構造解析などに対して共役勾配法に基づく反復型領域分割法の有効性が示されている。そこで著者らは 100 万自由度規模の問題の解析を目標に, 定常熱伝導問題に対し反復型領域分割法に基づく並列解析手法を導入した。

2. 熱伝導問題の定式化

ここでは, 簡単のため境界条件として熱伝達境界条件や熱放射境界条件は考慮せず, 温度境界条件と熱流束境界条件のみが与えられている問題を考える。Fig.1 に示すように多面体領域 Ω を考え, その境界を $\partial\Omega$, 境界上の外向き単位法線を ν とする。この際, 領域 Ω 内には単位体積当たり $\bar{f}$ の内部発熱が存在し, 境界 Γ_u 上に温度境界条件 $\bar{u}$ が, 境界 Γ_Q 上に熱流束境界条件 $\bar{Q}$ が与えられているものとする。全境界 $\partial\Omega$ は次式で与えられる。

$$\partial\Omega = \Gamma_u + \Gamma_Q \quad (1)$$

温度を u , 熱流束ベクトルを q とおくと, 全体領域 Ω において考

慮すべき系の方程式は, 以下のようになる [2]。

$$q_i = \lambda_{ij} u_{,j} \quad \text{in } \Omega \quad (2)$$

$$q_{i,i} + \bar{f} = 0 \quad \text{in } \Omega \quad (3)$$

$$q_i \nu_i - \bar{Q} = 0 \quad \text{on } \Gamma_Q \quad (4)$$

$$u = \bar{u} \quad \text{on } \Gamma_u \quad (5)$$

ここで λ_{ij} は熱伝導率を表し, 添字 $_{,j}$ は j 方向に関する微分を示すものとする。

3. 反復型領域分割法

Fig.2 のように解析対象を 2 領域に分割した場合を考える。

上付き添字 $^{(k)}$ はその値が部分領域 Ω_k で定義されていることを示し, 添字 $^{(l)}$ はその値が部分領域 Ω_k に隣接する Ω_l で定義されていることを示すものとする。部分領域 Ω_k, Ω_l 間に新たに定義された境界を γ_{kl} とおくと, 問題 (2)~(5) の解は以下の式を満たす。

$$q_i^{(k)} = \lambda_{ij}^{(k)} u_{,j}^{(k)} \quad \text{in } \Omega^{(k)} \quad (6)$$

$$q_{i,i}^{(k)} + \bar{f}^{(k)} = 0 \quad \text{in } \Omega^{(k)} \quad (7)$$

$$q_i^{(k)} \nu_i^{(k)} - \bar{Q}^{(k)} = 0 \quad \text{on } \Gamma_Q^{(k)} \quad (8)$$

$$u^{(k)} = \bar{u}^{(k)} \quad \text{on } \Gamma_u^{(k)} \quad (9)$$

$$q_i^{(k)} \nu_i^{(k)} + q_i^{(l)} \nu_i^{(l)} = 0 \quad \text{on } \gamma_{kl} \quad (10)$$

$$u^{(k)} = u^{(l)} \quad \text{on } \gamma_{kl} \quad (11)$$

ここで, 境界条件の取り扱いを容易にするため, 新しい変数 μ を導入し, 式 (11) を以下のように変形する。

$$u^{(k)} = u^{(l)} \equiv \mu \quad \text{on } \gamma_{kl} \quad (12)$$

Fig. 1. Domain Ω

Fig. 2. Partition Ω into 2 subdomains

Table. 1 Number of nodes, elements, and Interface DOF

case	nodes	elements	domains	interface DOF
I	4,913	3,072	100	2,605
II	29,791	20,250	100	9,649
III	30,0763	215,622	600	94,908

Table. 2 Iterations and CPU Time

case	iterations	CPU time[sec]
I	124	532
II	168	4,230
III	326	107,872

式 (10),(12) が部分領域間の境界で満たされるべき境界条件であり, それぞれ熱流束および温度の連続性を示している. 式 (12) を厳密に満足させ, 式 (10) を積分形を用いて平均的な意味で満足させることを考える.

まず, 次のような対称・正定値である関数 A を定義する.

$$A(\mu) = - \left(q_i^{(1)} \nu_i^{(1)} + q_i^{(2)} \nu_i^{(2)} \right) \Big|_{\gamma_{12}} \quad (13)$$

部分領域間境界における問題 $A(\mu) = 0$ に対して, 以下の共役勾配法に基づくアルゴリズムを導入し, 境界 γ_{kl} 上の温度 μ を解として求める.

Chose μ^0 ;

$$g^0 := A(\mu^0); \quad (14)$$

$$w^0 := g^0; \quad (15)$$

for $n = 0, 1, \dots$;

$$\rho_n := \frac{(g^n, g^n)}{(w^n, A(w^n))}; \quad (16)$$

$$\mu^{n+1} := \mu^n - \rho_n w^n; \quad (17)$$

$$g^{n+1} := g^n - \rho_n A(w^n); \quad (18)$$

$$\gamma_n := \frac{\|g^{n+1}\|^2}{\|g^n\|^2}; \quad (19)$$

$$w^{n+1} := g^{n+1} + \gamma_n w^n; \quad (20)$$

If $\frac{\max_i |g^n|}{\max_i |g^0|} < \epsilon$ break;

end;

ここで g^0 は

$$q_{i,i}^{(k)} + \bar{f}^{(k)} = 0 \quad \text{in } \Omega^{(k)} \quad (21)$$

$$q_i^{(k)} \nu_i^{(k)} - \bar{Q}^{(k)} = 0 \quad \text{on } \Gamma_Q^{(k)} \quad (22)$$

$$u^{(k)} = \bar{u}^{(k)} \quad \text{on } \Gamma_u^{(k)} \quad (23)$$

$$u^{(k)} = \mu^0 \quad \text{on } \gamma_{12} \quad (24)$$

を解いて得られる $q_{i,i}^{(1)}, q_{i,i}^{(2)}$ を用いて次式より求める.

$$g^0 = A(\mu^0) = - \left(q_i^{(1)} \nu_i^{(1)} + q_i^{(2)} \nu_i^{(2)} \right) \Big|_{\gamma_{12}} \quad (25)$$

また, $A(w^n)$ は,

$$q_{i,i}^{(k)} = 0 \quad \text{in } \Omega^{(k)} \quad (26)$$

$$q_i^{(k)} \nu_i^{(k)} = 0 \quad \text{on } \Gamma_Q^{(k)} \quad (27)$$

$$u^{(k)} = 0 \quad \text{on } \Gamma_u^{(k)} \quad (28)$$

$$u^{(k)} = w^n \quad \text{on } \gamma_{12} \quad (29)$$

Fig. 3 Profile of residual norms

を解いて得られる $q_{i,i}^{(1)}, q_{i,i}^{(2)}$ を用いて

$$A(w^n) = - \left(q_i^{(1)} \nu_i^{(1)} + q_i^{(2)} \nu_i^{(2)} \right) \Big|_{\gamma_{12}} \quad (30)$$

と計算できる.

収束解として部分領域間の温度境界条件 μ が得られれば, この μ を用いて式 (6)~(9) および式 (12) をもう一度解くことにより, 全領域での解を得ることができる.

4. 計算結果

上記のアルゴリズムに対して簡易モデルをもちいてテスト計算を行った. 簡易モデルとして正 6 面体を Table.1 に示すように 3 通りに分割したものを用いた. どの場合もまず 2 つの部分に部分分割し, それぞれの部分さらに領域に分割するという段階的な領域分割を行い, 階層型領域分割法 [1] による解析を行った. 境界条件として上面および下面の温度を規定し, 側面は全て断熱とした. 等方性を仮定し, 熱伝導率の温度依存性はないものとした. 各場合の計算とも Sun Enterprise(450MHz) と Sun Ultra Sparc(200MHz) の 2 台を用いて並列計算を行った.

反復の収束の判定は

$$\frac{\max_i |g^{(i)n}|}{\max_i |g^{(i)0}|} < 10^{-10} \quad (31)$$

で行った.

Fig.3 は反復回数に対する残差 $\max_i |g^{(i)n}| / \max_i |g^{(i)0}|$ の履歴である. いずれの場合も数百回程度の反復で収束解が得られた.

いずれの場合も解析結果は理論値と一致した.

Table.2 に収束までの反復回数および計算時間を示す.

5. 結論

境界条件として温度境界条件と熱流束境界条件を考慮した定常熱伝導問題に対し反復型領域分割法を導入し, 30 万自由度規模の問題に適用できることを示した. 今後はより大規模な熱伝導問題に対する並列計算および熱伝達境界を含む問題, 非定常問題への本手法の適用を予定している.

参考文献

- [1] 矢川元基, 塩谷隆二: 超並列有限要素解析, 朝倉書店, (1998)
- [2] 下関正義, 藤沼平一: PC-9801 有限要素法プログラミングの実例 [I], 日刊工業新聞社, (1989)