木須 博行^{*1}, 戎 圭明^{*1}, 松岡 淳^{*2}, 久保 昌史^{*2}

Identification of bending rigidity of beam by the Discrete Integral Method

Hiroyuki KISU^{*1}, Guiming RONG^{*1}, Jun MATSUOKA^{*2} and Masashi KUBO^{*2}^{*1} Faculty of Engineering, Nagasaki University^{*2} Student, Faculty of Engineering, Nagasaki University**Key Words** : Inverse problem, Discrete Integral Method, Bending rigidity, Boundary Element Method

1. 緒 言

従来の逆問題⁽¹⁾の解析の一つの問題点は、推定対象の仮定情報(形や数など)が必要なことがあげられる。本研究は逆問題の新しい解析法の一つとして、デルタ関数の性質を利用した離散積分法を導入し、推定対象の先験的情報が不要な逆問題の新たな解析法を提案しようとするものである。

著者らはすでに離散積分法を利用して、梁の曲げ問題における外荷重分布の推定問題を解く方法を構成した⁽²⁾。本研究では梁の曲げ剛性に適用し、たわみの観測から曲げ剛性の分布を推定する方法を提案する。

2. 問題の設定

2.1 デルタ関数を利用した離散積分法 まず初めに離散積分法を簡単に説明する。与えられた積分

$$\int_a^b f(x)M(x)dx \quad (1)$$

において、 $M(x)$ は既知関数、 $f(x)$ は対象となる関数(既知か未知)とする。この $f(x)$ を次式のようにDiracの δ 関数を用いて近似する。

$$\frac{d^n f}{dx^n} = \sum_{i=1}^m P_i \delta(x-x_i) \quad (2)$$

ここで d^n/dx^n は n 階の微分演算子、 P_i は δ 関数の強度、 x_i は δ 関数の作用位置、 m はその個数である。式(1)に対して $d^n Y^*(x)/dx^n = M(x)$ になるような関数 $Y^*(x)$ を導入し、部分積分を用いて変形すれば、 $n=2$ のとき、式(1)は次式となる

$$\int_a^b f(x)M(x)dx = \left[\frac{dY^*}{dx} f - Y^* \frac{df}{dx} \right]_a^b + \sum_{i=1}^m Y^*(x_i)P_i \quad (3)$$

* 原稿受付

^{*1} 長崎大学工学部機械システム工学科^{*2} 同学生員

Email: kisu@net.nagasaki-u.ac.jp

すなわち、境界値とデルタ関数の強度 P_i で表されることが分かる。これを利用して、以下のような逆問題の解法を構成する。

2.2 境界要素法による逆問題の定式化 曲げ剛性 $EI(x)$ の一定でない梁の曲げ問題の支配方程式は以下になる。

$$\frac{d^2}{dx^2} \left(EI(x) \frac{d^2 W}{dx^2} \right) = q \quad (4)$$

ここに W はたわみ、 x は梁の長さ方向の座標、 q は外荷重である。核関数として

$$W^* = \frac{|x-s|^3}{12} \quad (5)$$

を採り、式(4)の両辺にかけて、部分積分すると

$$\begin{aligned} W(s)EI(s) &= [QW^*]_0^L - \left[M \frac{dW^*}{dx} \right]_0^L - \left[\theta EI(x) \frac{d^2 W^*}{dx^2} \right]_0^L \\ &+ \left[W \frac{d}{dx} \left(EI(x) \frac{d^2 W^*}{dx^2} \right) \right]_0^L - \sum_{i=1}^m W(x_i)P_i \frac{d^2 W^*(x_i,s)}{dx^2} \\ &- 2 \int_0^L W(x) \frac{d}{dx} EI(x) \frac{d^3 W^*}{dx^3} dx + \int_0^L q W^* dx \quad (6) \end{aligned}$$

となる。さらに上式中の EI とその導関数を消去する。

ここでは求める曲げ剛性分布を式(2)において $n=2$ としたもので近似する。

$$\frac{d^2}{dx^2} EI(x) = \sum \delta_i P_i \quad (7)$$

$d^2 Z^*/dx^2 = -\delta(x-s)$ を満足するような関数 Z^* を式(7)の両辺にかけて、部分積分で展開すると

$$\begin{aligned} EI(s) &= -\frac{dZ^*(L,s)}{dx} EI(L) + \frac{dZ^*(0,s)}{dx} EI(0) \\ &+ Z^*(L,s) \frac{dEI(L)}{dx} - Z^*(0,s) \frac{dEI(0)}{dx} - \sum P_i Z^*(x_i,s) \quad (8) \end{aligned}$$

となる。上式で $s \rightarrow L$ と $s \rightarrow 0$ の操作および上式の微分により、未知の EI の分布とその導関数、および $dEI(L)/dx$ と $dEI(0)/dx$ を、両端の EI と m 個の P_i を用いて表すことができる。すなわち、式 (6) は

$$\begin{aligned} A(s)EI(L) + B(s)EI(0) + Q_i(s)\Sigma P_i \\ = R(s) + \int_0^L qW^*(x,s)dx \end{aligned} \quad (9)$$

となる。ここに、 $A(s), B(s), Q_i(s)$ はそれぞれの係数、 $R(s)$ は既知の積分項のまとめであり、詳細は省略する。 m 個の観測点と両端の境界条件により連立方程が構成され、両端の EI と P_i を求めることができる。しかる後、再び式 (8) を使えば、梁の任意の点の EI を定めることができる。

3. 解析例

本報では、長さ 10 の単純支持梁に、大きさが 10 の集中荷重が中央点に作用する場合、梁の各点のたわみや境界値をモニターし、梁の曲げ剛性を求める問題を設定した。

図 1 は $EI(x) = 10x + 100$ (幅方向一次変化) の時の結果である。観測点としては 10 点を取っている。この場合、 $EI(x)$ の二回微分は 0 であるから、観測点数が少ない時でもいい結果が得られている。

Fig. 1 Identification of linearly changed EI

次に段付きはりの同定結果を図 2 示す。区間 $0 \leq x \leq 2.5$ と $7.5 \leq x \leq 10$ が $EI(x) = 100$ 、 $2.5 \leq x \leq 7.5$ が $EI(x) = 200$ となっている場合を計算した。 $EI(x)$ は不連続のため、観測点数は 50 点を取った。段の付近ではオーバーシュートが現れるものの、全体的に十分な精度の結果が得られている。

図 3 と図 4 はそれぞれ $EI(x) = (0.1x + 1)^3$ (高さ方向一次変化の例) $EI(x) = (0.03x^2 - 0.25x + 1)^3$ (高さ方向二次変化の例) の同定結果であり、観測点数はいずれも 100 である。いずれの場合も極めて高精度に同定できていることが示されている。

この他、境界条件と荷重条件を変えた問題の計算も行ったが、それらに無関係に同様な精度良い同定結果を得ることができた。以上のように、本研究による方

法では、一切の先験的な情報の仮定なく、どのような $EI(x)$ の変化でも精度良く同定できることが示された。

Fig. 2 Identification for a step beam

Fig. 3 Result of a beam with linear shape

Fig. 4 Result of a beam with quadratic shape

4. 結 言

離散積分法に基づいた逆問題の新型解法を、外荷重推定問題に続いて、梁の曲げ剛性の同定問題に適用した。本方法によれば、境界条件や荷重条件いかに拘らず、いろいろな分布形をもつ剛性分布を精度良く同定できることを示した。

文 献

- (1) 久保司郎, 逆問題, 培風館, (1992), pp.209
- (2) 木須ほか, 一次元逆問題の境界要素法による新型解法, “機論”, 667 巻, 61 号 A, (2001), pp.1423-1428