915 はりの曲げ剛性分布推定における測定誤差の影響と安定化処理*

木須 博行^{*1}, 戎 圭明^{*1}, 成 勇勲^{*2}

The influence of measurement error on identification of bending rigidity of beam and its stabilizing

Hiroyuki KISU^{*1}, Guiming RONG^{*1} and Yonghoon Sung^{*2}

^{*1} Faculty of Engineering, Nagasaki University

^{*2} Graduate School of Nagasaki University

Key Words : Inverse problem, Discrete Integral Method, Bending rigidity, Boundary Element Method

1. 緒 言

著者らは推定対象の先験的情報が不要な逆問題の新たな解析法⁽¹⁾⁽²⁾を提案している。前報ではたわみの観測値からはりの曲げ剛性分布を推定する方法を構成した。その際、観測値に誤差が含まれない場合を示したが、実際には誤差の存在を前提とした推定法の確立が必要となる。本論文は、測定誤差が存在する時の同定解の挙動を定量的に調べるとともに、同定解が不安定になる現象を解決する安定化処理について報告するものである。

2. 問 題 の 設 定

2.1 境界要素法による逆問題の定式化 すでに前報⁽²⁾で示したが、本研究における逆問題の定式化は以下のようにまとめることができる。まず、曲げ剛性 $EI(x)$ の一定でないはりの曲げ問題の支配方程式は、長手方向の座標を x とすると式となる。

$$\frac{d^2}{dx^2} \left(EI(x) \frac{d^2 W}{dx^2} \right) = q(x) \quad (1)$$

ここに W はたわみ、 $q(x)$ は外荷重である。

さらに、 EI の分布を次式のようにデルタ関数を用いた関数近似法を用いて表現する。

$$\frac{d^2}{dx^2} EI(x) = \sum_{i=1}^m P_i \delta(x - x_i) \quad (2)$$

ただし、 δ は Dirac のデルタ関数、 P_i はデルタ関数の強度、 x_i はその作用点の座標、はその個数である。剛性分布 $EI(x)$ が未知の場合、式 (2) においては、 P_i が

未知数となる。この方法を採用する理由は、1. 通常の1次要素による関数近似では2階微分すると0となり、意味をなさなくなること、2. 積分が単なる積和で得られるようになること、の2点である。

重み関数を W^* として、式 (1) を部分積分し、式 (2) を用いると最終的に次式が得られる。

$$\begin{aligned} W(s)EI(s) = [QW^*]_0^L - \left[M \frac{dW^*}{dx} \right]_0^L - \left[\theta EI(x) \frac{d^2 W^*}{dx^2} \right]_0^L \\ + \left[W \frac{d}{dx} \left(EI(x) \frac{d^2 W^*}{dx^2} \right) \right]_0^L - \sum_{i=1}^m W(x_i) P_i \frac{d^2 W^*(x_i, s)}{dx^2} \\ - 2 \int_0^L W(x) \frac{d}{dx} EI(x) \frac{d^3 W^*}{dx^3} dx + \int_0^L q W^* dx \quad (3) \end{aligned}$$

ここに、 Q はせん断力、 M は曲げモーメント、 θ はたわみ角である。本論文において設定した逆問題とは、上式を利用して、たわみ W を観測して曲げ剛性 EI の分布を求めることである。ただし、曲げ剛性 EI そのものではなく、式 (2) におけるデルタ関数の強度 P_i が求まることになる。すなわち、次式のような連立一次方程式が構成される。

$$AP = b \quad (4)$$

ここに、係数マトリクス A は $m \times m$ の正方行列、 P は P_i を未知数とするベクトルである。これを解いた後に式 (2) より EI の分布が得られる。

3. 測定誤差の影響と安定化処理

前報で示したように、たわみの観測値に関して、測定誤差がないとした場合、先験的情報の仮定なく、十分な精度で曲げ剛性分布を推定できた。しかし、たわみの測定値に誤差がある場合、推定解がどのような影響を受けるか、十分な検討が必要である。

* 原稿受付

^{*1} 長崎大学工学部機械システム工学科

^{*2} 長崎大学大学院

Email: kisu@net.nagasaki-u.ac.jp

ここでは段つきはりの同定問題について記す。長さ 10 の単純支持梁に、大きさが 10 の集中荷重が中央点に作用するはりの問題を設定した。はりの剛性分布は、区間 $0 \leq x \leq 2.5$ と $7.5 \leq x \leq 10$ が $EI(x) = 100$ 、 $2.5 \leq x \leq 7.5$ が $EI(x) = 200$ であり、この剛性分布を梁の各点のたわみや境界条件をモニターして同定する。(計算法の検証が目的なので、ここでは単位系は無次元としている。)

初めに、測定誤差がないものとして、正確なたわみを与え、この曲げ剛性分布を式 (3) により推定した結果を図 1 に示す。前報でも示したように、十分な推定結果が得られている。

Fig. 1 Identification for a step beam

いっぽう、実際の場合を考えると、反力や曲げモーメントなどは理論的に計算できるとしても、たわみの測定値は誤差を含むことを前提に、一定の誤差があっても精度よい安定した同定法の確立が肝要である。本論文におけるアルゴリズムによれば、この誤差は連立方程式 (4) の左辺の係数行列に影響する。

連立方程式を解くとき、各係数の誤差が累積して、A マトリックスのサイズの増大に連れて解が大きく変動し不安定になることがありうる。この一例を図 2 に示す。ただし、各観測値には最大 $\pm 1\%$ の誤差を与えた。このように、未知数の数が増大すると解が大きく変動する場合のあることがわかる。これらを解消するための方策として、著者らは 2 つの方法を導入した。すなわち、1. 測定誤差のばらつきをなるべく抑えるために、測定値そのものではなく回帰曲線を用いること、2. ランクを低減し、安定化処理を行うこと、である。この安定化処理法は、再計算を伴うが、その一般的な手順も構成した。

3.1 測定値の曲線回帰 測定値そのものよりも、最小自乗近似により測定値の再帰曲線を作り、それを用いる方が解の安定化にははるかに有効であることがわかった。ここでの計算によれば、回帰次数を 6 以上にしてもあまり改善は見られず、また 6 次近似の偏

差ノルムが最も小さいことがわかった。回帰次数が 6 次なら実用的でもあるので、一般的には 6 次の回帰曲線で十分であろうと思われる。

3.2 ランク低減による解の安定化 図 2 に示されたように、未知数の数が少ないと係数マトリックスの誤差に鈍感であり、連立方程式の解は比較的安定しているが、段つき部などの剛性変化にも鈍感となる。そこでモニター点を増やすと、連立方程式の解が大きく変動し、不安定となることがわかる。実際にはこの兼ね合いが難しい。図 3 はモニター点数が 21 とした場合の同定結果である。この時、ランクを 11 と 9 に低減したことにより安定した解が得られている。ただし、段付部の剛性が急変する部分では再現性が鈍く、これを改善するのが今後の課題である。

Fig. 2 Identification for a step beam with different number of P

Fig. 3 Effect of decreasing the ranks for a stepped beam

4. 結 言

たわみの観測値からはりの曲げ剛性分布を推定する方法を構成し、測定誤差が存在する時の同定解の挙動を定量的に調べるとともに、同定解が不安定になる現象を解決する安定化処理について報告した。

文 献

- (1) 木須ほか、一次元逆問題の境界要素法による新型解法, “機論”, 667 巻, 61 号 A, (2001), pp.1423-1428
- (2) 木須ほか、離散積分法による梁の曲げ剛性の同定, 九州支部講演論文集 No.028-1 pp.67-68