614 スライディングモード・オブザーバによる構造物の振動推定

Estimation of Vibration Modes for a Framed Structure via Sliding Mode Observer

正 藤本 孝 (九産大) 正 曹 鳳英 (九産大)
〇学 林 啓 (九産大院)

Takashi FUJIMOTO, Kyushu Sangyo University, Matukadai2-3-1, Higashi-ku, Fukuoka
Feng ying CAO, Kyushu Sangyo University, Kei HAYASHI, Kyushu Sangyo University

Key Words : Sliding mode observer, FEM, Reduced order model

1. はじめに

現代制御理論をはじめとする状態量ベースの制御系設計では、全ての状態量をフィードバックすることを前提としている。したがって、センサで直接的に測定できない状態量を何らかの方法で推定する必要がある。

線形制御理論の枠組みの中では、最適理論に基づいてオブザーバを構成する方法が数多く提案されている。しかし、外乱が大きい場合や制御対象の非線形性が無視できない場合には、推定精度が低下するという欠点がある。一方、スライディングモード理論に基づいて構成される制御システムは、外乱や制御対象の非線形性に対してロバスト性を有するという特徴がある。このような観点から、Utkin はスライディングモード理論に基づくオブザーバ、いわゆる Utkin オブザーバを提案している⁽¹⁾。本論文では、構造物の振動変位を推定するという観点から、この Utkin オブザーバの安定性に改良を加えた修正 Utkin オブザーバを提案する。

最後に、数値シミュレーションを行って、設計されたオブザーバの妥当性を検討する。

2. 低次元化数式モデルの作成

図 1 に示す構造物を対象とし、FEM 解析汎用ソフト ANSYS を用いて振動解析を行い、推定しようとする 1 次から 5 次までの固有振動数と固有モードを抽出して、修正 Utkin オブザーバの設計の基礎となる低次元化数式モデルを作る。

要素分割の節点番号は図 1 に示すとおりである。変位センサを頂上部節点 7 番に配置し、外乱力は節点 2 の位置で作用するものとする。1 節点 3 自由度であり、全体の自由度は 36 となる。したがって、これにより求められる固有振動数と固有振動モードの組は 36 個となる。

有限要素により定式化される構造物の運動方程式は、ダンピングを無視し、一般化変位ベクトル $\mathbf{q}(t)$ を用い、外力項は外乱力のみがある場合の運動方程式は次式のようにになる。

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{q}(t) = \mathbf{E}_w \mathbf{w}(t) \quad (2-1)$$

ただし、 $\mathbf{M}$, $\mathbf{K}$ は質量および剛性行列、 $\mathbf{E}_w$ は外乱力 $\mathbf{w}(t)$ が作用する位置を表すベクトルである。

振動解析で得られる正規化モード行列から無視しようとする 5 次モード以上の高次モードに対応する列を削除した行列 Φ と基準座標 $\mathbf{p}(t)$ ($\mathbf{q}(t) = \Phi \mathbf{p}(t)$) を用い、さらに実験的 (semi-empirical) に求められる構造物の減衰比 ζ_i を導入して、

Fig.1 Model of a five-story structure

Table.1 Natural frequencies and damping ratio

mode	固有振動数 $f_i = \omega_i / 2\pi (\text{Hz})$		減衰比 ζ_i
	解析値	実験値	半実験値
1st	4.2	4.1	0.0050
2nd	12.5	12.4	0.0045
3rd	20.4	20.2	0.0041
4th	27.1	26.7	0.0031
5th	31.6	31.4	0.0027

式(2-1)を書き直せば、

$$\ddot{\mathbf{p}}(t) + \Lambda \dot{\mathbf{p}}(t) + \Omega^2 \mathbf{p}(t) = \mathbf{e}_w \mathbf{w}(t) \quad (2-2)$$

となる。ただし、

$$\Lambda = \text{diag}(2\zeta_i \omega_i), \quad \Omega^2 = \Phi^T \mathbf{K} \Phi = \text{diag}[\omega_i^2], \quad \mathbf{e}_w = \Phi^T \mathbf{E}_w$$

基準座標で表した構造物の運動方程式を状態方程式で表すと次式のようにになる。

$$\begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{p}}(t) \\ \ddot{\mathbf{p}}(t) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\Omega^2 & -\Lambda \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{p}(t) \\ \dot{\mathbf{p}}(t) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{e}_w \end{bmatrix} \mathbf{w}(t) \quad (2-3)$$

また、構造物の頂上部の水平変位測定点の位置を表すマトリックスを $\mathbf{c}$ とすると、変位の出力方程式は次のようになる。

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{c} \Phi \mathbf{p}(t) \quad (2-4)$$

数値計算の精度を向上させるためにベクトル $\mathbf{P}(t)$ を次のように座標変換する。

$$\mathbf{P}(t) = \mathbf{T}_p \mathbf{Z}(t), \quad \mathbf{P}(t) = \begin{Bmatrix} \mathbf{p}(t) \\ \dot{\mathbf{p}}(t) \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{Z}(t) = \begin{Bmatrix} \mathbf{z}(t) \\ \dot{\mathbf{z}}(t) \end{Bmatrix} \quad (2-5)$$

ただし、

$$\mathbf{T}_p = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \Omega \end{bmatrix}$$

式(2-5)を式(2-3)に代入すると、新たな基準座標 $\mathbf{Z}(t)$ で表し

た低次元化状態方程式は次式ようになる。

$$\begin{Bmatrix} \dot{z}(t) \\ \ddot{z}(t) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \Omega \\ -\Omega & -\Lambda \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} z(t) \\ \dot{z}(t) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -\Omega^{-1}e_w \end{bmatrix} w(t) \quad (2-6)$$

3. 修正 Utkin オブザーバの設計

低次元化されたモデルの状態方程式と出力方程式に基づいて、修正 Utkin オブザーバを設計する。

状態方程式(2-6)と出力方程式(2-4)を簡潔に表すと、次のように表現できる。

$$\begin{aligned} \dot{Z}(t) &= AZ(t) + B_w w(t) \\ y(t) &= CZ(t) \end{aligned} \quad (3-1)$$

ただし、

$$A = \begin{bmatrix} 0 & \Omega \\ -\Omega & -\Lambda \end{bmatrix}, B_w = \begin{bmatrix} 0 \\ \Omega^{-1}e_w \end{bmatrix}, C = c\Phi T_p, Z(t) = \begin{Bmatrix} z(t) \\ \dot{z}(t) \end{Bmatrix}$$

$Z(t)$ を観測不可能な状態量 $x(t)$ と観測可能な状態量 $y(t)$ に分離して並べたベクトルに変換するために、座標変換

$$\begin{Bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{Bmatrix} = T_c Z(t), T_c = \begin{bmatrix} N_c^T \\ C \end{bmatrix} \quad (3-2)$$

を導入する。ただし、 N_c は C のヌル・スペースである。座標変換後の数式モデルの部分マトリックスは

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A_{11}x(t) + A_{12}y(t) + B_1 w(t) \\ \dot{y}(t) &= A_{21}x(t) + A_{22}y(t) + B_2 w(t) \end{aligned} \quad (3-3)$$

になる。

式(3-3)に対する Utkin オブザーバは次のように構成される。

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}}(t) &= A_{11}\hat{x}(t) + A_{12}\hat{y}(t) + L v(t) \\ \dot{\hat{y}}(t) &= A_{21}\hat{x}(t) + A_{22}\hat{y}(t) - v(t) \end{aligned} \quad (3-4)$$

オブザーバの非線形入力式 $v(t)$ は次式で与えられる。

$$v(t) = M \operatorname{sign}(e_y), M > 0$$

ただし、 e_y は出力推定誤差 $e_y = \hat{y}(t) - y(t)$ である。

出力推定誤差の線形フィードバック項を式(3-4)に追加して、Utkin オブザーバを次のように修正する。

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}}(t) &= A_{11}\hat{x}(t) + A_{12}\hat{y}(t) - g_1 e_y(t) + L v(t) \\ \dot{\hat{y}}(t) &= A_{21}\hat{x}(t) + A_{22}\hat{y}(t) - g_2 e_y - v(t) \end{aligned} \quad (3-5)$$

式(3-3)における外乱を無視した式と式(3-5)より、誤差システムは次のようになる。

$$\begin{Bmatrix} \dot{e}_x(t) \\ \dot{e}_y(t) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} e_x(t) \\ e_y(t) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} -g_1 & L \\ -g_2 & -1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} e_y(t) \\ v(t) \end{Bmatrix} \quad (3-6)$$

この誤差システムを安定にするように L, g_1, g_2 を設計する。結論的に述べると、 L は $A_{11} + LA_{21}$ を安定にするように定めればよい。また g_1 と g_2 は次のように求められる。

$$g_1 = A_{12} - A_{11}L + LA_{22}^S, g_2 = A_{22} - A_{22}^S - A_{21}L$$

ただし、 A_{22}^S は安定なマトリックス (1×1 の場合は負の定数) を指定する。

式(3-2)を式(3-7)に代入すると、修正 Utkin オブザーバシステムは次のように求められる。

$$\dot{\hat{Z}}(t) = A\hat{Z}(t) + G_1 e_y + G_2 v$$

ただし、

$$G_1 = T_c^{-1} \begin{bmatrix} -g_1 \\ -g_2 \end{bmatrix}, G_2 = T_c^{-1} \begin{bmatrix} L \\ -1 \end{bmatrix}, v(t) = M \operatorname{sgn}(\hat{y}(t) - y(t))$$

である。

4. 数値シミュレーション

数値シミュレーションの結果の一例を以下に示す。なお、設計パラメータは、 $M=1, A_{22}^S=-10$ とした。図2からわかるように、構造物頂上部の測定変位とオブザーバによる推定変位の比較はよく一致している。図3はオブザーバ内部で作られる非線形入力項、また図4に各モード成分を示している。

Fig.2 Displacement at the top of the structure

Fig.3 Nonlinear input

Fig.4 mode components

5. おわりに

紙面の都合で初期値応答の数値シミュレーションは示していないが、やはり強制加振した場合と同様に推定性能は良好であることが確認された。オブザーバをコンピュータに実装した実験結果との比較は講演会当日に示す。

主要な参考文献

- (1) Edwards, C and Spurgeon, S. K., Sliding Mode Control, Theory and Application, Taylor and Francis, (1998), pp.59-64