A Simplified Method of Optimal Circular Arc Interpolation for Involute Curves

正 丘 華 (九産大),

○学 西島 祐次郎 (九産大院)

Hua QIU and Yujiro NISHIJIMA, Kyushu Sangyo University, 2-3-1 Matsukadai, Higashi-ku, Fukuoka-city

Key Words: Involute Curve, Optimal Circular Arc Interpolation, Calculation Algorithm

1. 緒 言

曲線輪郭の設計・加工・計測を簡便に行うために、従来インボリュート曲線を円弧で近似または補間する方法が研究されている⁽¹⁾⁻⁽⁶⁾。しかし、現有的方法によれば、最適補間円弧のパラメータを決める際に連立非線形方程式を解かなければならない⁽⁷⁾。この実用上の不便さを解消するために、本研究では、連立非線形方程式を解く必要がない、簡便なインボリュート曲線の最適円弧補間法を提案する。

2. 補間方法

2・1 最適補間円弧のパラメータ Fig. 1 に示すように、円弧でインボリュート曲線を補間する場合、円弧とインボリュート曲線との間に補間誤差の極値点が二つ存在する。これらの点をAとBとし、かつ円弧がインボリュート曲線の右側になるとき補間誤差の値を正、左側になるときは負とすれば、補間誤差の極値 aA は負、 Bb は正となる。補間精度の値が $\pm E$ に指定され、かつ $-aA=Bb=E$ が成り立つ場合は、次の関係が得られる⁽⁶⁾。

$$\begin{cases} K = R/r_b \\ E/r_b = \sqrt{K^2 - 1} - \cos^{-1}(1/K) = \tan \beta - \beta \\ \rho = r_b \theta \end{cases} \quad (1)$$

上式における K の値が E/r_b のみに関係して ρ と θ とは無関係である。

一方、円弧がインボリュート曲線に接する場合、その接点が補間誤差極値点である。もう一つの補間誤差極値点で補間誤差の絶対値が E であれば、すなわち、Fig. 1 の中に $aA=0$ と $Bb=E$ 、または、 $aA=-E$ と $Bb=0$ の場合、文献(6)と同様な手法を用いれば、次の関係が得られる。

$$\begin{cases} K_1 = R_1/r_b \\ E/r_b = 2\left\{\sqrt{K_1^2 - 1} - \cos^{-1}(1/K_1)\right\} = 2(\tan \beta_1 - \beta_1) \\ \rho = r_b \theta \pm 0.5E \end{cases} \quad (2)$$

ここで、式(1)に示した状態を区別するために、円弧に関するパラメータにサーフィックス 1 をつけた。また、この場合に補間誤差の極値点間に対応するインボリュート曲線の展開角 ϕ の幅は $2\beta_1$ である。

2・2 最適円弧補間における基本的関係 平面曲線の最適円弧補間とは、曲線の両端で円弧が曲線と接し、円弧間の接続が滑らかで、各円弧における補間誤差の極値が等しくかつ指定された精度値 $\pm E$ 以内に抑えられ、必要な円弧の数が最も少ない、という円弧補間である⁽⁷⁾。したがっ

Fig. 1 Interpolation relation of circular arc for involute curve

Fig. 2 Optimal interpolation using two circular arcs for an involute curve

て、インボリュート曲線を最適円弧補間する場合には、曲線の長さ及び指定された補間精度の値によらず、少なくとも2個の円弧が必要となる。

2個の円弧で補間する場合、補間誤差の極値 $\pm E$ が指定補間精度値 $\pm E$ になるときの円弧とインボリュート曲線の間を Fig. 2 に示す。この場合、円弧は式(2)以外に次の式も満足する。

$$\begin{cases} \theta_1 = \phi_0 + \beta_1, & \rho_1 = r_b \theta_1 + 0.5E, \\ \theta_2 = \phi_N - \beta_1, & \rho_2 = r_b \theta_2 - 0.5E, \\ \phi_N - \phi_0 = 2\beta_1 + \theta_2 - \theta_1 = 2\beta_1 + \Delta\theta_0 \end{cases}$$

文献(6)と同様な手法を用いれば、次の関係が得られる。

$$K_1 \sin(0.5\Delta\theta_0) = 0.5\Delta\theta_0 \quad (3)$$

一方、2個以上、例えば、4個の円弧で補間する場合、補間誤差の値 e が指定補間精度値 E になるときの円弧とインボリュート曲線の間を Fig. 3 に示す。この場合、1番目と4番目の円弧は式(2)、2番目と3番目の円弧が式(1)

Fig. 3 Optimal interpolation using four circular arcs for an involute curve

Fig. 4 An example of the obtained interpolation error curve due to a specified accuracy $E/r_b=10^{-4}$

をそれぞれ満足し、さらに次の関係が成り立つ。

$$\begin{cases} \theta_1 = \phi_0 + \beta_1, & \rho_1 = r_b \theta_1 + 0.5E, \\ \theta_2 = \theta_1 + (\theta_2 - \theta_1) = \theta_1 + \Delta\theta_1, & \rho_2 = r_b \theta_2, \\ \theta_3 = \theta_2 + (\theta_3 - \theta_2) = \theta_2 + \Delta\theta, & \rho_3 = r_b \theta_3, \\ \theta_4 = \phi_N - \beta_1 = \theta_3 + (\theta_4 - \theta_3) = \theta_3 + \Delta\theta_1, & \rho_4 = r_b \theta_4 - 0.5E, \\ \phi_N - \phi_0 = 2\beta_1 + 2\Delta\theta_1 + \Delta\theta \end{cases}$$

文献(6)と同様な手法を用いれば、次の関係式が得られる。

$$K_1^2 - 2K_1 K \cos \Delta\theta_1 + K^2 = (\Delta\theta_1 - 0.5E/r_b)^2 \quad (4)$$

$$K \sin(0.5\Delta\theta) = 0.5\Delta\theta \quad (5)$$

2・3 必要な円弧の数 展開角の領域が $\Delta\phi (= \phi_N - \phi_0)$ のインボリュート曲線を指定補間精度値 $\pm E$ で最適円弧補間するときの必要な円弧の数 n は次式による。

$$\begin{cases} n=2 & \text{if } \Delta\phi \leq 2\beta_1 + \Delta\theta \\ n=3 & \text{if } 2\beta_1 + \Delta\theta < \Delta\phi \leq 2(\beta_1 + \Delta\theta_1) \\ n=3+k & \text{if } \Delta\phi > 2(\beta_1 + \Delta\theta_1) \\ k = \lceil [\Delta\phi - 2(\beta_1 + \Delta\theta_1)] / \Delta\theta \rceil & \text{if } [\Delta\phi - 2(\beta_1 + \Delta\theta_1)] / \Delta\theta \text{ is an integral} \\ k = \text{int}\{[\Delta\phi - 2(\beta_1 + \Delta\theta_1)] / \Delta\theta\} + 1 & \text{for others} \end{cases} \quad (6)$$

2・4 計算アルゴリズム

- r_b, ϕ_0, ϕ_N と E を入力, $\Delta\phi = \phi_N - \phi_0$.
- 式(1)~(5)より $K_1, \beta_1, K, \Delta\theta_0, \Delta\theta_1, \Delta\theta$ を求め, 式(6)より必要な補間円弧の数 n を定める。 $n=2$ なら(c)へ,

$n=3$ なら(d)へ, $n>3$ の場合は(e)へ。

- $2\beta_1 + \Delta\theta_0 = \Delta\phi$ なら, (f)へ。そうでない場合, 指定補間精度値 E の代わりに補間誤差極値 e を変数として取扱い, β_1 と $\Delta\theta_0$ を e の関数と見直して, 次式を満足するように e を定め, (f)へ。

$$\Delta\phi = 2\beta_1(e) + \Delta\theta_0(e) \quad (7)$$

- $2\beta_1 + 2\Delta\theta_1 = \Delta\phi$ なら, (f)へ。そうでない場合, β_1 と $\Delta\theta_1$ を e の関数として, 次式を満足するように e を定め, (f)へ。

$$\Delta\phi = 2\beta_1(e) + 2\Delta\theta_1(e) \quad (8)$$

- $2(\beta_1 + \Delta\theta_1) + k\Delta\theta = \Delta\phi$ なら, (f)へ。そうでない場合, $\beta_1, \Delta\theta_1, \Delta\theta$ を e の関数として, 次式を満足するように e を定め, (f)へ。

$$\Delta\phi = 2\{\beta_1(e) + \Delta\theta_0(e)\} + k\Delta\theta(e) \quad (9)$$

- 得られた補間誤差極値 e に基づいて, 各補間円弧の関係パラメータを決める。

$$\begin{cases} \theta_1 = \phi_0 + \beta_1, & \rho_1 = r_b \theta_1 + 0.5e, \\ \theta_n = \phi_N - \beta_1, & \rho_n = r_b \theta_n - 0.5e, \\ \theta_2 = \theta_1 + \Delta\theta_1, & \theta_{n-1} = \theta_n - \Delta\theta_1, \\ \theta_i = \theta_{i-1} + \Delta\theta, & (i=3, 4, \dots, n-2), \\ \rho_i = r_b \theta_i & (i=2, 3, \dots, n-1) \end{cases} \quad (10)$$

かつ, j 番目と $j+1$ 番目円弧間の接続点 (x_j, y_j) 及びそれに対応するインボリュート曲線の展開角 ϕ_j ($j=1, 2, \dots, n-1$) は次式による。

$$\begin{cases} x_j = x_{c,j+1} - \rho_{j+1}(x_{c,j+1} - x_{c,j}) / (\rho_{j+1} - \rho_j) \\ y_j = y_{c,j+1} - \rho_{j+1}(y_{c,j+1} - y_{c,j}) / (\rho_{j+1} - \rho_j) \\ \phi_j = a \tan 2(y_j, x_j) + \cos^{-1}(r_b / \sqrt{x_j^2 + y_j^2}) \\ x_{c,j} = R \cos \theta_j, & y_{c,j} = R \sin \theta_j \quad (j=2, 3, \dots, n-1), \\ x_{c,j} = R_1 \cos \theta_j, & y_{c,j} = R_1 \sin \theta_j \quad (j=1, n) \end{cases} \quad (11)$$

- 計算終了。

3. 補間例

提案した方法の有効性を確認するために, $E/r_b=10^{-2}, 10^{-3}, \dots, 10^{-8}, \phi_0=0, \phi_N=2\pi$ の条件でインボリュート曲線を補間した。得られた補間誤差曲線の1例を Fig. 4 に示す。

4. 結 言

連立非線形方程式を解く必要がなく, 実用上便利なインボリュート曲線の最適円弧補間法を提案した。また, 補間計算の結果から提案手法の有効性が確認された。

文 献

- (1) D. W. Dudley, Gear Handbook, McGraw-Hill, (1962), 23-19. (2) 会田・寺内・平松, 大型歯車用簡易歯形検査機について, 精密機械, 20-8, (1954), 285. (3) 斉藤・石川, 円弧基準式歯形測定機の試作, 機論, 35-275, C(1969), 1545. (4) 津田・石川・福田, 歯車の成形研削に関する研究, 精密機械, 42-9, (1976), 893. (5) 丘・有浦, インボリュート歯形の円弧近似, 機論, 55-517, C(1989), 2507. (6) 丘・有浦・尾崎, 指定補間誤差値を持つインボリュート輪郭曲線の最適円弧補間法, 機論, 60-572, (1994), 1482. (7) 丘・有浦・尾崎, 平面曲線輪郭の精密NC加工のための最適円弧補間法, 機論, 62-593, C(1996), 338.