Bifurcation Analysis in Non-autonomous Mechanical Systems
with State Interrupted Characteristics○学 朝長 伸吾 (大分大院) 馬 躍 (京都大)
正 高坂 拓司 (大分大)Shingo TOMONAGA, Oita University, Dannoharu700, Oita-city, Oita
Yue MA, Kyoto University, Yoshidahonmachi, Sakyo-ku, Kyoto-city, Kyoto
Takuji KOUSAKA, Oita University**Keywords :** Nonlinear Dynamics, Chaos and Fractal, Forced Vibration, Bifurcation,
Interrupted Characteristics, Mechanical Systems

1. 緒言

様々な断続動作特性を有する力学系の分岐解析は、古くから盛んに行われている。先に我々も電気系に見られる断続動作特性を有する系の解析を行ったが⁽¹⁾⁽²⁾、機械系においてもその動的挙動の解明は重要な研究課題とされている⁽³⁾。しかし、各々の系が非線形もしくはたとえ線形であっても高次元で記述される場合、厳密解を用いた解軌道の求積は困難であり、系が不連続点を含むとき問題はより複雑になる。

そこで本稿では、各々の系が非自律系で記述され、状態依存型断続動作特性を有する系の分岐点を数値的に解析する手法を提案する。また、適用結果を示すことで本手法の正当性を確認する。

2. 解軌道と Poincaré 写像

次の n 次元非自律系を考える。

$$S_1 : \dot{x} = f_1(t, x, p_1), S_2 : \dot{x} = f_2(t, x, p_2) \quad (1)$$

周期関数 f_1, f_2 を次式で仮定し、

$$f_{1,2}(t, x, p_{1,2}) = f_{1,2}(t + T, x, p_{1,2}) \quad (2)$$

境界を次のように定義する。

$$B = \{x \in \mathbb{R}^n : \beta(x) = 0\} \quad (3)$$

t_0, x_{01}, x_{02} を初期値とすると解軌道は次の関係で定められ、

$$\begin{aligned} x(t) &= \varphi_1(t, t_0, x_{01}), \text{ if } x \in M_1 \\ x(t) &= \varphi_2(t, t_0, x_{02}), \text{ if } x \in M_2 \end{aligned} \quad (4)$$

写像を次のように定義する。

$$F_m : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n; x(0) \mapsto x(T) \quad (5)$$

解が $x(0) = x(kT), k = 1, 2, \dots$ を満たすとき、 k 周期解をもつ。このとき、式(3)と式(4)より、図1に示す解軌道は次のように記述され、

$$\begin{aligned} x_1 &= \varphi_1(\tau_1, \tau_0, x_0), x_2 = \varphi_2(\tau_2, \tau_1, x_1), \\ x_3 &= \varphi_1(T + \tau_0, \tau_2, x_2) \end{aligned} \quad (6)$$

$$\beta(x_1) = \beta(x_2) = 0 \quad (7)$$

次の関係式が成り立つ。

$$x_2 = \varphi_2(\tau_2 - \tau_1, 0, x_1), x_3 = \varphi_1(T - \tau_2, 0, x_2) \quad (8)$$

Fig. 1: A period-1 orbit, and its Poincaré map $x_0 \mapsto x_3$.

3. 固定点の追跡

未知の項 $\{x_0, x_1, x_2, \tau_1, \tau_2\}$ を得るため、Newton 法を用いる。このとき、第一変分は次のようになり、

$$\begin{aligned} \frac{\partial x_1}{\partial x_0} &= \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} \Big|_{t=\tau_1} \frac{\partial \tau_1}{\partial x_0} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_0}, \\ \frac{\partial x_2}{\partial x_0} &= \frac{\partial \varphi_2}{\partial t} \Big|_{t=\tau_2} \frac{\partial \tau_2}{\partial x_0} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial \tau_1} \frac{\partial \tau_1}{\partial x_0} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial x_0}, \\ \frac{\partial x_3}{\partial x_0} &= \frac{\partial \varphi_1}{\partial \tau_2} \frac{\partial \tau_2}{\partial x_0} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial x_0} \end{aligned} \quad (9)$$

初期時間 τ_1, τ_2 において、次の変分が成り立つ。

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} \Big|_{t=\tau_1} &= f_1(\tau_1, x_1, p_1), \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial t} \Big|_{t=\tau_2} &= f_2(\tau_2, x_2, p_2) \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi_2}{\partial \tau_1} &= -\frac{\partial \varphi_2}{\partial x_1} f_2(\tau_1, x_1, p_2), \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial \tau_2} &= -\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2} f_1(\tau_2, x_2, p_1) \end{aligned} \quad (11)$$

また、 $\partial \varphi_1 / \partial x_0, \partial \varphi_2 / \partial x_1, \partial \varphi_1 / \partial x_2$ は次式で得られ、

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_0} \right) &= \frac{\partial f_1}{\partial x} \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_0} \right), \quad \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_0} \Big|_{t=0} = I_n, \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial x_1} \right) &= \frac{\partial f_2}{\partial x} \left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial x_1} \right), \quad \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_1} \Big|_{t=\tau_1} = I_n, \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2} \right) &= \frac{\partial f_1}{\partial x} \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2} \right), \quad \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2} \Big|_{t=\tau_2} = I_n \end{aligned} \quad (12)$$

式(7)より境界の変分は次のようになる。

$$\frac{\partial \beta(x_1)}{\partial x_0} = \frac{\partial \beta}{\partial x} \frac{\partial x_1}{\partial x_0} = 0, \quad \frac{\partial \beta(x_2)}{\partial x_0} = \frac{\partial \beta}{\partial x} \frac{\partial x_2}{\partial x_0} = 0 \quad (13)$$

4. 安定性解析

式 (9) に代入することで次式が成り立つため、

$$\frac{\partial x_1}{\partial x_0} = f_1(\tau_1, x_1, p_1) \frac{\partial \tau_1}{\partial x_0} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_0} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial x_2}{\partial x_0} &= f_2(\tau_2, x_2, p_2) \frac{\partial \tau_2}{\partial x_0} \\ &\quad - \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_1} f_2(\tau_1, x_1, p_2) \frac{\partial \tau_1}{\partial x_0} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial x_0} \end{aligned} \quad (15)$$

$$\frac{\partial x_3}{\partial x_0} = -\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2} f_1(\tau_2, x_2, p_1) \frac{\partial \tau_2}{\partial x_0} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial x_0} \quad (16)$$

式 (13) から式 (15) より次の関係式が得られる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tau_1}{\partial x_0} &= -\frac{\frac{\partial \beta}{\partial x} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_0}}{\frac{\partial \beta}{\partial x} f_1(\tau_1, x_1, p_1)}, \\ \frac{\partial \tau_2}{\partial x_0} &= -\frac{\frac{\partial \beta}{\partial x} \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial x_0} - \frac{\partial \beta}{\partial x} \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_1} f_2(\tau_1, x_1, p_2) \frac{\partial \tau_1}{\partial x_0}}{\frac{\partial \beta}{\partial x} f_2(\tau_2, x_2, p_2)} \end{aligned} \quad (17)$$

これらを式 (16) に代入すると、 $x_0 \mapsto x_3$ の Poincaré 写像の Jacobi 行列が得られる。

ここで、固定点に関する特性方程式は次式で記述され、

$$\chi(\mu) = |DM(x) - \mu I_n| = 0 \quad (18)$$

この式の根である特性乗数が 1 に等しい場合は接線分岐、 -1 の場合は周期倍分岐、共役な複素数でその絶対値が 1 に等しい場合は Neimark-Sacker 分岐が生じることが知られている。式 (18) を固定点条件と連立させ、 x およびパラメータについて解くことで分岐パラメータの計算が可能となる。

5. 適用結果

以下、上記の手法を図 2 に示す 1 自由度振動系に適用する。質量 m は周期外力を受けて振動し、質点 x_1 が境界 d に達したとき、 m は壁に衝突し系が切り換わる。このとき周期外力 $F(t)$ は次式を満たす。

$$F(t) = F \cos(\omega t) \quad (19)$$

図 3 に $F = 0.27$ における状態平面図を示す。実線は安定、破線は不安定な解軌道を、また赤点は Poincaré 写像の位置をそれぞれ示している。ここで解の周期を n 、系の切り換わり回数を m とし、このときの解を " $PnTm$ " と定義すると、 $F = 0.2609451$ において安定な P1T1 と P2T1、不安定な P2T2 の 3 つの解の共存が観測できる。また F を増加させると、 $F = 0.28692$ において grazing 分岐が発生し、不安定な P2T2 は安定な P1T1 に変化する。

図 4 に外力の振幅 F に伴う二次元分岐図を示す。ここで、GZ は grazing 分岐、SN は接線分岐、PD は周期倍分岐の発生を示しており、 F を変化させることで接線分岐と周期倍分岐の分岐曲線が接触し、接線分岐が消失する。

Fig. 2: The mechanical system considered in the example.

Fig. 3: The phase portraits when $F = 0.27$. (a) The stable P1T1 orbit; (b) The stable P2T1 orbit; (c) The unstable P2T2 orbit.

Fig. 4: A two-parameter bifurcation diagram in the $F - k_2$ plane.

6. 結言

本稿では、各々の系が非自律系で記述され、状態依存型断続動作特性を有する系の分岐点を数値的に解析する手法を提案した。また、本手法を 1 自由度振動系に適用することでその正当性を確認した。

参考文献

- (1) T. Kousaka., T. Ueta., Y. Ma. and H. Kawakami., Bifurcation Analysis of a Piecewise Smooth System with Nonlinear Characteristics. *International Journal of Circuit Theory and Applications*, Vol. 33-4, No. 7 (2005), pp. 263-279.
- (2) Y. Ma., C. K. Tse., T. Kousaka. and H. Kawakami., General Consideration for Modeling and Bifurcation Analysis of Switched Dynamical Systems. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, Vol. 16, No. 3 (2006), pp. 639-700.
- (3) Nonlinear Dynamics and Analytic Method in Mechanical System. *Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers, Series C*, Vol. 73, No. 728 (2007), pp. 974-981.