E 0 9 希薄気体の振動クエット流

Oscillatory Couette flow of a rarefied gas

正 ○土井俊行 (鳥取大)

Toshiyuki DOI, Tottori University, Koyama-minami 4-101, Tottori

Key Words: Boltzmann equation, rarefied gas, forced oscillation, macro flows

1. はじめに 2枚の平行平板がその平面内で振動するときのそれらの間の気体の流れは振動クエット流と呼ばれ、流体力学の基本的問題の1つである。非常に小さい寸法の系におけるこの流れは、近年マイクロマシン等に関連して興味を持たれている。平板間の距離が気体分子の平均自由行程程度の場合、あるいは振動数が平均衝突頻度程度の場合には Navier-Stokes 方程式に代わって分子気体力学 (Boltzmann 方程式) に基づく取り扱いが必要となる。最近、DSMC や気体論モデル方程式に基づく解析が行われているが ([1]-[3])、マイクロマシンなどでは通常速度は小さいため、線形解析が好ましい。本研究では、剛体球分子気体に対する線形化 Boltzmann 方程式に基づき、気体の希薄度および振動数の広い範囲に対し、この流れの様子を調べる。

2. 問題と基礎式 温度 T_0 の2枚の平行平板 $X_1 = 0, L$ (X_i : 空間直角座標) ではさまれた領域の気体を考える。片方の平板 $X_1 = 0$ が速度 $(0, V_w \cos \omega t, 0)$ (t : 時間) で $\pm X_2$ 方向に振動している (Fig. 1)。このときの気体の時間について周期的な振舞を剛体球分子気体に対する線形化 Boltzmann 方程式に基づいて調べる。

Fig. 1. Schematic view of the system.

使用する記号をまとめておく: $x_i = X_i/L$: 無次元空間座標, $\hat{t} = t/L(2RT_0)^{-1/2}$: 無次元時間, $(2RT_0)^{1/2}\zeta_i$: 分子速度, $\rho_0(2RT_0)^{-3/2}E(1+\phi)$: 速度分布関数, $E = \pi^{-3/2} \exp(-\zeta_i^2)$, p_0 : 気体の圧力, $\rho_0 = p_0/RT_0$, v_i : 気体の流速, p_{ij} : 気体の応力テンソル, R : 気体定数, ν_c : 気体分子の平均衝突頻度, $\ell = (8RT_0/\pi)^{1/2}\nu_c^{-1}$: 平均自由行程, $\text{Kn} = \ell/L$: Knudsen 数, $k = (\sqrt{\pi}/2)\text{Kn}$, $\Omega = \omega/(2RT_0)^{1/2}L^{-1}$: Strouhal 数 (あるいは ballistic Stokes 数), $u_w = V_w/(2RT_0)^{1/2}$, $i = \sqrt{-1}$.

基礎方程式は線形化 Boltzmann 方程式と拡散反射条件である:

$$\frac{\partial \phi}{\partial \hat{t}} + \zeta_1 \frac{\partial \phi}{\partial x_1} = \frac{1}{k} \mathcal{L}(\phi) \quad (0 < x_1 < 1), \quad (1)$$

$$\phi = 2\zeta_2 u_w \cos \Omega \hat{t} - 2\sqrt{\pi} \int_{\zeta_1 < 0} \zeta_1 \phi E d\zeta_1 d\zeta_2 d\zeta_3, \quad (x_1 = 0, \zeta_1 > 0), \quad (2)$$

$$\phi = 2\sqrt{\pi} \int_{\zeta_1 > 0} \zeta_1 \phi E d\zeta_1 d\zeta_2 d\zeta_3 \quad (x_1 = 1, \zeta_1 < 0). \quad (3)$$

$\mathcal{L}(\phi)$ は線形衝突積分作用素 [4] である。気体の流速 v_i と応力テンソル p_{ij} は ϕ のモーメントで表される:

$$v_i/(2RT_0)^{1/2} = \int \zeta_i \phi E d\zeta_1 d\zeta_2 d\zeta_3, \quad (4)$$

$$p_{ij}/p_0 = \delta_{ij} + 2 \int \zeta_i \zeta_j \phi E d\zeta_1 d\zeta_2 d\zeta_3. \quad (5)$$

時間的に周期的な解を考えているため、速度分布関数 ϕ は次の形で探することができる:

$$\phi(x_1, \zeta_i, \hat{t})/u_w = \text{Real} [\exp(-i\Omega \hat{t}) \zeta_2 \Phi(x_1, \zeta_1, \zeta_\rho)], \quad (6)$$

ここで $\text{Real}[*]$ は $*$ の実部をとることを意味し、また $\zeta_\rho = (\zeta_2^2 + \zeta_3^2)^{1/2}$ 。式 (6) を (1)-(3) に代入すると、 $\Phi(x_1, \zeta_1, \zeta_\rho)$ に対する次の境界値問題に帰着する:

$$-i\Omega \Phi + \zeta_1 \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} = \frac{1}{k\zeta_2} \mathcal{L}(\zeta_2 \Phi) \quad (0 < x_1 < 1), \quad (7)$$

$$\Phi = 2 \quad (x_1 = 0, \zeta_1 > 0), \quad (8)$$

$$\Phi = 0 \quad (x_1 = 1, \zeta_1 < 0). \quad (9)$$

この問題は2つのパラメータ k と Ω によって特徴付けられる。なお、解 (6) に対応して

$$v_1 = v_3 = 0, \quad p_{11} = p_{22} = p_{33} = p_0, \quad p_{13} = p_{23} = 0,$$

また、気体の圧力、温度は定数になる。

3. 解析 上述の境界値問題は差分法によって解く。その際、問題となる衝突積分は数値積分核法 [5] を用いて評価する。また、本問題では、Strouhal 数 Ω が大きくなると速度分布関数が ζ_1 に関して激しい振動関数になるため、直接的数値解析が困難となる。ただし、その振動的振舞の主要項 ($\Phi_\#$ とする) の関数形は既知であるので、分布関数 Φ のそれからの残差 $\Phi - \Phi_\#$ を取り扱うことにより、より穏やかな (非同次項を持つ) 問題を解くことに帰着できる。これらによって正確な数値解析が可能となる。

4. 結果 以下に数値計算結果を示す。気体の流速 v_2 とせん断応力 p_{12} はそれぞれ振幅 $|U|$, $|P|$ および位相遅れ φ_U , φ_P を用いて次式で表される:

$$v_2/(2RT_0)^{1/2}u_w = \text{Real}[\exp(-i\Omega\hat{t} + i\varphi_U)|U|], \quad (10)$$

$$p_{12}/p_0u_w = \text{Real}[\exp(-i\Omega\hat{t} + i\varphi_P)|P|]. \quad (11)$$

$|U|$, φ_U , $\dots$ は X_1 の関数である。Knudsen 数 $k = 0.1$ と 10 の場合についての $|U|$, φ_U , $|P|$, φ_P を、 X_1 の関数として、Figs. 2, 3 にそれぞれ示す。図の破線は定常な(振動のない) Couette 流の解であり [6]、このときせん断応力 $|P|$ は X_1 について一様、また $\varphi_U = \varphi_P = 0$ である。Strouhal 数 Ω が小さい場合 ($\Omega \sim 0.1$) には気体の振舞は定常 Couette 流のものに近い。 Ω が大きくなるにつれ、流速は振動壁 $X_1 = 0$ 付近で激しく振動するようになり(位相 φ_U の急な増加を見よ)、また壁面から離れるにつれて急速に減衰するようになる。Knudsen 数 k が比較的小さいときには (Fig. 2), Ω が大きくなるにつれて振動壁面上でのせん断応力は非常に大きくなり、また、静止壁 $X_1 = L$ でのせん断応力は小さくなる。 k が大きいときには (Fig. 3), Ω が大きくなっても振動壁面上でのせん断応力はあまり変化しない。一方、静止壁面上でのせん断応力はどんどん小さくなる。

振動壁 $X_1 = 0$ と静止壁 $X_1 = L$ 表面上での気体のせん断応力 p_{12} の振幅 $|P|$ を、Knudsen 数 $k = 0.1, 1, 10$ について、Strouhal 数 Ω の関数として Fig. 4 に示す。およそ $\Omega < 0.1$ の範囲では、どちらの壁面においても(気体中でも)せん断応力は定常 Couette 流のものに近い [cf. Figs. 2(c), 3(c)]。Strouhal 数 Ω が ~ 0.1 を超えて大きくなると変化が著しくなる。振動壁 $X_1 = 0$ でのせん断応力は $\Omega = 0.1 \sim 10$ の範囲で Ω と共に増大し、 $\Omega \sim 10$ では漸近値に達する [Fig. 4(a)]。また、この漸近値は Knudsen 数 k に依らないことがわかる。一方、静止壁 $X_1 = L$ でのせん断応力は、 $\Omega \sim 0.1$ を越えた付近から減少を始め、 Ω の増加と共にゼロに近づく [Fig. 4(b)]。

Fig. 2. Variation of the amplitude and phase of the flow velocity v_2 and that of the shear stress p_{12} I: $k = 0.1$. (a) Amplitude $|U|$ and (b) phase φ_U of the flow velocity v_2 , and (c) amplitude $|P|$ and (d) phase φ_P of the shear stress p_{12} [See Eqs. (10) and (11)]. - - -: time-independent Couette flow (Ref. [6]), for which φ_U and φ_P vanish identically.

Fig. 3. Variation of the amplitude and phase of the flow velocity v_2 and that of the shear stress p_{12} II: $k = 10$. (a) Amplitude $|U|$ and (b) phase φ_U of the flow velocity v_2 , and (c) amplitude $|P|$ and (d) phase φ_P of the shear stress p_{12} [See Eqs. (10) and (11)]. - - -: time-independent Couette flow (Ref. [6]), for which φ_U and φ_P vanish identically.

Fig. 4. Amplitude $|P|$ of the shear stress acting on the two walls as the function of Ω for three k 's [see Eq. (11)]. (a) At $X_1 = 0$ and (b) $X_1 = L$. - - -: time-independent Couette flow (Ref. [6]), - . - . = $1/\sqrt{\pi}$ (≈ 0.5642).

参考文献

- [1] J. H. Park, P. Bahukudumbi & A. Beskok, *Phys. Fluids* **16** (2004) 317.
- [2] N. Hadjiconstantinou, *Phys. Fluids* **17** (2005) 100611.
- [3] F. Sharipov & D. Kalempa, *Microfluid Nanofluid* **4** (2008) 346.
- [4] Y. Sone, *Molecular Gas Dynamics* (Birkhäuser, 2007).
- [5] Y. Sone, T. Ohwada & K. Aoki, *Phys. Fluids A* **1** (1989) 363.
- [6] Y. Sone, S. Takata & T. Ohwada, *Euro. J. Mech/B Fluids* **9** (1990) 273.