境界条件が周期的に変化する2次元衝突振動系について: 1周期解に生じる局所的分岐点計算法*

○(学) 平嶋 昭太 (大分大)*¹, (非) 合原 一幸 (東大)*², (正) 高坂 拓司 (大分大)*¹

On an Impact Oscillator with Periodic Boundary Condition: Calculation Method of Local Bifurcations for Period-1 Orbit

Shota Hirashima*¹ and Kazuyuki Aihara*² and Takuji Kousaka*¹

*¹ Department of Mechanical and Energy Systems Engineering, Oita University 700 Dannoharu, Oita, 870-1192, Japan

*² Faculty of Engineering, The University of Tokyo 7-3-1 Hongo, Bunkyo-ku, Tokyo, 113-8656, Japan

Key Words : Impact Oscillator, Numerical Calculation Method, Bifurcation Point, Period-1 Orbit, Periodic Boundary Condition

1. は じ め に

力学系の解析を行う上で、分岐解析を用いた定性的性質の解明は重要であり、有用な情報を得ることが可能である⁽¹⁾。しかし、機械系などにみられる衝突振動系⁽²⁾においては衝突の際に発生するジャンプにより不連続点が生じるため、分岐解析に必要な変分の導出が困難である。それ故、衝突振動系に対する一般的な分岐解析法は未だ確立されていない。そこで、このクラスの系に対する1周期解の安定性解析⁽³⁾を提案したが、分岐点を計算することはできない。本稿では、境界条件が周期的に変化する2次元衝突振動系において、1周期解の局所的な分岐点計算法を提案する。まず、2次元衝突振動系を記述し、解を定義する。次に、周期的に変化する境界条件より境界断面を考え、ジャンプに関する写像を用いてPoincaré写像を合成する。最後に、Poincaré写像の微分およびそれらの要素を詳細に示し、1周期解および分岐パラメータの計算法について議論する。

2. 分 岐 点 計 算 法

2.1 Poincaré 写像 次の2次元衝突振動系を考える。

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(x, y, \lambda) \\ \frac{dy}{dt} = g(x, y, \lambda) \end{cases} \quad (1)$$

また、式(1)の解を

$$\begin{cases} x(t) = \phi(t; x, y, \lambda), & x(0) = x_0 \\ y(t) = \psi(t; x, y, \lambda), & y(0) = y_0 \end{cases} \quad (2)$$

と記述する。ここで、周期的に変化する境界条件を用い、スカラー関数 $q_0, q_1 : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ で構成される境界断面 Π_0 および Π_1 を定義する (図1参照)。

$$\begin{aligned} \Pi_i &= \{x, y \in \mathbf{R}^2 : q_i(x, y) = 0, q_i : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}\} \\ q_i(t+T; x, y) &= q_i(t; x, y), \quad i = 0 \text{ or } 1 \end{aligned} \quad (3)$$

また、境界断面との衝突時刻 τ_0 と仮定し、写像 P を

$$\begin{aligned} P : \Pi_1 &\rightarrow \Pi_0, \\ \begin{bmatrix} x_{1a-} \\ y_{1a-} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \phi(\tau_0; x_0, y_0, \lambda) \\ \psi(\tau_0; x_0, y_0, \lambda) \end{bmatrix} \\ \mapsto \begin{bmatrix} x_{1a+} \\ y_{1a+} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} x_{1a-} \\ y_{1a-} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4)$$

Fig. 1 2次元衝突振動系

* 原稿受付 2011 年 9 月 29 日

*¹ 大分大学工学部 (〒 870-1192 大分市大字旦野原 700 番地)

*² 東京大学生産技術研究所 (〒 113-8656 東京都文京区本郷 7-3-1)

Email: shota@bifurcation.jp

と定義する。この写像により、解軌道にジャンプが与えられ、境界の周期 T で離散化された解 x_1, y_1 は

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varphi(T - \tau_0; x_{1a+}, y_{1a+}, \lambda) \\ \phi(T - \tau_0; x_{1a+}, y_{1a+}, \lambda) \end{bmatrix} \quad (5)$$

を満たす。衝突の前後において、写像

$$M_0: \mathbf{R}^2 \rightarrow \Pi_1, (x_0, y_0) \mapsto (x_{1a-}, y_{1a-}) \quad (6)$$

$$M_1: \Pi_0 \rightarrow \mathbf{R}^2, (x_{1a+}, y_{1a+}) \mapsto (x_1, y_1)$$

をそれぞれ定義し、これらより 1 周期解は次の合成 Poincaré 写像で記述される。

$$M: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$$

$$\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = M_1 \circ P \circ M_0 \quad (7)$$

2.2 Jacobi 行列 次に、局所的分岐点計算法に必要な条件式について記述する。1 周期解は合成写像 M を用いて、

$$M(x_0, y_0) \mathbf{I}_2 - \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} = \mathbf{0} \quad (8)$$

が成り立つ。また、次式の 1 周期解に関する特性方程式より、1 周期解の安定性を導出する。

$$\chi(\mu) = \det[DM(x_0) - \mu \mathbf{I}_2] = 0 \quad (9)$$

したがって、条件式を下記のように連立する。

$$F(x_0, y_0, \lambda) = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} M(x_0, y_0) - \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} \\ \chi(\mu) \end{bmatrix} = 0 \quad (10)$$

これらを任意の数値解析法を用いて、 x_0, y_0 および分岐パラメータ λ について解くことで、分岐点を計算する。解析に必要なとなる F の Jacobi 行列は

$$DF(x_0, y_0, \lambda) = \begin{bmatrix} \frac{\partial M}{\partial x_0} - 1 & \frac{\partial M}{\partial y_0} & \frac{\partial M}{\partial \lambda} \\ \frac{\partial M}{\partial x_0} & \frac{\partial M}{\partial y_0} - 1 & \frac{\partial M}{\partial \lambda} \\ \frac{\partial \chi(\mu)}{\partial x_0} & \frac{\partial \chi(\mu)}{\partial y_0} & \frac{\partial \chi(\mu)}{\partial \lambda} \end{bmatrix} \quad (11)$$

で記述される。さらに、Jacobi 行列に含まれる写像の微分 $DM(x_0)$ を示す。

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial M(x_0)}{\partial x_0} & \frac{\partial M(x_0)}{\partial y_0} \\ \frac{\partial M(y_0)}{\partial x_0} & \frac{\partial M(y_0)}{\partial y_0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \Big|_{t=T-\tau_0} \\ \frac{\partial \phi}{\partial t} \Big|_{t=T-\tau_0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{\partial \tau_0}{\partial x_0} & -\frac{\partial \tau_0}{\partial y_0} \end{bmatrix} \quad (12)$$

$$+ \begin{bmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial x_{1a-}} & \frac{\partial \varphi}{\partial y_{1a-}} \\ \frac{\partial \phi}{\partial x_{1a-}} & \frac{\partial \phi}{\partial y_{1a-}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial x_{1a-}}{\partial x_0} & \frac{\partial x_{1a-}}{\partial y_0} \\ \frac{\partial y_{1a-}}{\partial x_0} & \frac{\partial y_{1a-}}{\partial y_0} \end{bmatrix}$$

式 (12) における要素は以下となる。

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial x_{1a-}}{\partial x_0} & \frac{\partial x_{1a-}}{\partial y_0} \\ \frac{\partial y_{1a-}}{\partial x_0} & \frac{\partial y_{1a-}}{\partial y_0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \Big|_{t=\tau_0} \\ \frac{\partial \phi}{\partial t} \Big|_{t=\tau_0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial \tau_0}{\partial x_0} & \frac{\partial \tau_0}{\partial y_0} \end{bmatrix} \quad (13)$$

$$+ \begin{bmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial x_0} & \frac{\partial \varphi}{\partial y_0} \\ \frac{\partial \phi}{\partial x_0} & \frac{\partial \phi}{\partial y_0} \end{bmatrix} \quad (14)$$

また、境界断面上で成り立つ $q_1(\tau_0; x_0, y_0, \lambda) = 0$ より

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \tau_0}{\partial x_0} \\ \frac{\partial \tau_0}{\partial y_0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\left(\frac{\partial q}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial x_0} + \frac{\partial q}{\partial y} \frac{\partial \varphi}{\partial y_0}\right) \\ \frac{\frac{\partial q}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \Big|_{t=\tau_0} + \frac{\partial q}{\partial y} \frac{\partial \phi}{\partial t} \Big|_{t=\tau_0} + \frac{\partial q}{\partial t} \Big|_{t=\tau_0}}{\frac{\partial q}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \Big|_{t=\tau_0} + \frac{\partial q}{\partial y} \frac{\partial \phi}{\partial t} \Big|_{t=\tau_0} + \frac{\partial q}{\partial t} \Big|_{t=\tau_0}} \\ -\left(\frac{\partial q}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial y_0} + \frac{\partial q}{\partial y} \frac{\partial \phi}{\partial y_0}\right) \\ \frac{\frac{\partial q}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \Big|_{t=\tau_0} + \frac{\partial q}{\partial y} \frac{\partial \phi}{\partial t} \Big|_{t=\tau_0} + \frac{\partial q}{\partial t} \Big|_{t=\tau_0}}{\frac{\partial q}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \Big|_{t=\tau_0} + \frac{\partial q}{\partial y} \frac{\partial \phi}{\partial t} \Big|_{t=\tau_0} + \frac{\partial q}{\partial t} \Big|_{t=\tau_0}} \end{bmatrix} \quad (15)$$

が成り立つ。 $\chi(\mu)$ の微分も同様に導出可能である。

お わ り に

本稿では、境界条件が周期的に変化する 2 次元衝突振動系において、1 周期解の局所的分岐点計算法を提案した。まず、微分方程式より解を記述し、境界断面を定義した。また、1 周期解の導出に必要な合成 Poincaré 写像を構成し、分岐点計算法に必要な連立方程式の Jacobi 行列を導出した。なお、適用結果に関する詳細は発表時に報告する。今後の課題としては、様々な周期解に適用し得る本手法の拡張が挙げられる。

謝 辞

本研究の一部は、総合科学技術会議により制度設計された最先端研究開発支援プログラム (FIRST 合原最先端数理モデルプロジェクト) により、日本学術振興会を通して助成されたものです。

文 献

- (1) T. Kousaka, T. Ueta, Y. Ma and H. Kawakami, *Bifurcation Analysis of a Piecewise Smooth System with Nonlinear Characteristics*, "International Journal of Circuit Theory and Applications", Vol. 33, No. 4, (2005) pp. 263–279.
- (2) F. Peterka, *Bifurcations and Transition Phenomena in an Impact Oscillator*, "Chaos, Solitons and Fractals", Vol. 7, No. 10, (1996), pp. 1635–1647.
- (3) S. Hirashima, S. Karube and Takuji Kousaka, *Numerical Calculation Method of Characteristic Multiplier for the Fixed Point in a Rigid Overhead Wire-Pantograph System*, "Proc. NOLTA2010", (2010), pp. 249–252.