リカーシブ動力学計算法を利用した 柔軟マルチボディシステムの最適軌道計画アルゴリズム

An Optimal Trajectory Planning Method for Flexible Multibody Systems Using Recursive Dynamics Algorithms

学 花田 成輝 (福大院) 学 内川 真吾 (福大院) 正 岩村 誠人 (福岡大)

*Naruki Hanada, Shingo Uchikawa and Makoto Iwamura, Fukuoka University

Key Words: Flexible Multibody Systems, Optimal Trajectory, Recursive Algorithm, Sensitivity Analysis

1. はじめに

著者らは既報 [1] において、マルチボディダイナミクスの分野で開発されているフローティングフレーム法とロボティクスの分野で開発されているリカーシブ法を融合し、それらの利点を合わせ持つ柔軟マルチボディシステム (MBS) の汎用的かつ高速な順逆動力学計算法を提案している。一方、既報 [2] において、自由度や関節配置によらず任意の剛体マルチボディシステムに適用可能な汎用的な最適軌道計画アルゴリズムを提案している。本稿では既報 [1] と既報 [2] の計算法を組み合わせ、柔軟マルチボディシステムの汎用的な最適軌道計画アルゴリズムを定式化する。表記の煩雑さを避けるために平面開ループ系の場合についてアルゴリズムの概要を示す。

2. 柔軟 MBS のリカーシブ動力学計算法

2.1 運動学関係式

図 1 に示すような N 個の弾性体が回転関節によって直列に結合された柔軟リンク系について考える。ここでは、関節部は剛性が高く変形しないと仮定し、ボディ i 座標系 Σ_i を根本側の関節 i に設置することにする。ボディ i の任意点における変形 u_i^e と変形による姿勢変化 θ_i^e は次のように表せる。

$$u_i^e = S_i^t q_i^e, \quad \theta_i^e = S_i^r q_i^e \quad (1)$$

ここで、 $q_i^e \in R^{N_e}$ は弾性座標、 S_i^t, S_i^r は時間に依存しない形状関数行列であり、左上の添字 i はそのベクトルが Σ_i で表示されていることを示す。任意点の速度 $\dot{r}_i$ と角速度 Ω_i は

$$\dot{r}_i = L_i^t v_i, \quad \Omega_i = L_i^r v_i \quad (2)$$

と表せる。ここで、 $L_i^t = [E \quad -V^i u_i \quad S_i^t]$, $L_i^r = [0 \quad 1 \quad S_i^r]$, $v_i = [{}^i \dot{R}_i^T \quad \omega_i \quad \dot{q}_i^{eT}]^T$, E は単位行列、 u_i は Σ_i 原点から任意点へのベクトル、 R_i は絶対座標系 Σ_0 の原点から Σ_i の原点へのベクトル、 ω_i はボディ座標系の角速度、 V は 2 次元直交回転行列である。

関節 i の角変位を q_i^j 、 Σ_{i-1} 原点から Σ_i 原点へのベクトルを u_{i-1}^j とすると、隣接するボディ i とボディ $i-1$ の速度、加速度の関係は次式のように表せる。

$$v_i = C_i v_{i-1} + J_i \dot{q}_i \quad (3)$$

$$a_i = C_i a_{i-1} + J_i \ddot{q}_i + \beta_i \quad (4)$$

Fig.1 Relationship between neighboring bodies

$$C_i = \begin{bmatrix} {}^i A_{i-1} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E & -V^{i-1} u_{i-1}^j & S_{i-1}^{tj} \\ 0 & 1 & S_{i-1}^{rj} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ただし、 $a_i = [{}^i \ddot{R}_i^T \quad \ddot{\omega}_i \quad \ddot{q}_i^{eT}]^T$, $q_i = [q_i^j \quad q_i^{eT}]^T$ と定義しており、 S_{i-1}^{tj} , S_{i-1}^{rj} はそれぞれ関節 i すなわち Σ_i 原点における S_{i-1}^t , S_{i-1}^r である。また、 J_i はヤコビ行列、 ${}^{i-1} A_i$ は Σ_i から Σ_{i-1} への座標変換行列、 $\beta_i = \dot{C}_i v_{i-1} + \ddot{J}_i \dot{q}_i$ である。

2.2 運動方程式

柔軟ボディ i の運動方程式は、次のように導出できる [1]。

$$M_i a_i + h_i + k_i = F_i \quad (5)$$

$$M_i = \int_{V_i} \rho_i L_i^{tT} L_i^t dV_i \equiv \begin{bmatrix} M_i^{tt} & M_i^{tr} & M_i^{te} \\ \text{Sym.} & M_i^{rr} & M_i^{re} \\ & & M_i^{ee} \end{bmatrix}$$

$$h_i = \int_{V_i} \rho_i L_i^{tT} (-\omega_i^2 u_i - 2\omega_i V S_i^t \dot{q}_i^e) dV_i \equiv \begin{bmatrix} h_i^t \\ h_i^r \\ h_i^e \end{bmatrix}$$

$$k_i = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ K_i q_i^e \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} k_i^t \\ k_i^r \\ k_i^e \end{bmatrix}, \quad K_i = \int_{V_i} S_i^{tT} D_i^T E_i D_i S_i^t dV_i$$

ここで、 ρ_i は密度、 D_i は ${}^i \epsilon_i = D_i {}^i u_i^e$ のように変位からひずみを定義するための微分演算子、 E_i は ${}^i \sigma_i = E_i {}^i \epsilon_i$ のように応力とひずみを関連付ける弾性係数行列である。

ボディ i に作用する一般化力 F_i を、ジョイント i を介してボディ $i-1$ より受ける一般化力 $F_i^j = [{}^i f_i^{jT} \quad n_i^j \quad 0]^T$ 、ボディ i がジョイント $i+1$ を介してボディ $i+1$ に及ぼす一般化力 F_{i+1}^j の反力、およびそれ以外の一般化力 F_i^{other} に分けると

$$F_i = F_i^j + F_i^{other} - C_{i+1}^T F_{i+1}^j \quad (6)$$

のように表せる。一般化力 F_i^j は式 (5), (6) より

$$F_i^j = M_i a_i + h_i + k_i - F_i^{other} + C_{i+1}^T F_{i+1}^j \quad (7)$$

のように計算でき、 F_i^j が得られると、 $q_i = [q_i^j \quad q_i^{eT}]^T$ に対応する一般化駆動力 $\tau_i = [\tau_i^j \quad \tau_i^{eT}]^T$ は次式により求められる。

$$\tau_i = J_i^T F_i^j \quad (8)$$

2.3 逆動力学計算

現在の状態 $q, \dot{q}$ および発生させるべき $\ddot{q}$ が与えられて、それに必要な τ を求める逆動力学計算は、まず根元 $i=1$ から先端 $i=N$ まで式 (3), (4) を計算し、その後先端 $i=N$ から根元 $i=1$ まで式 (7), (8) を計算することにより実行できる。以下ではこれを関数化したものを $\tau = ID(q, \dot{q}, \ddot{q})$ と表わす。

2.4 順動力学計算

現在の状態 $q, \dot{q}$ および τ が与えられて、それによって発生するはずの $\ddot{q}$ を求める順動力学計算は、次のアルゴリズムによって行うことができる。ただし、 e_i は単位ベクトルである。

- 1) $h(q, \dot{q}) = ID(q, \dot{q}, 0)$ を計算する。
- 2) $i=1$ から $N_{dof} = N(1+N_e)$ まで $m_i = ID(q, \dot{q}, e_i) - h$ を計算し、慣性行列 $M = [m_1 \quad m_2 \cdots m_{N_{dof}}]$ を求める。
- 3) $\ddot{q} = M(q)^{-1} \{\tau - h(q, \dot{q})\}$ を計算する。

3. 柔軟 MBS の最適軌道計画問題

N リンク柔軟 MBS の最小次元運動方程式は次式

$$M(q)\ddot{q} + h(q, \dot{q}) = \tau \quad (9)$$

のように表せる．ここで， $q = [q_1^T \ q_2^T \ \cdots \ q_N^T]^T \in R^{N_{dof}}$ は関節変数ベクトル， $\tau = [\tau_1^T \ \tau_2^T \ \cdots \ \tau_N^T]^T \in R^{N_{dof}}$ は関節駆動力ベクトル， $M(q) \in R^{N_{dof} \times N_{dof}}$ は慣性行列， $h(q, \dot{q}) \in R^{N_{dof}}$ は遠心力，コリオリ力，重力，その他 τ 以外のすべての外力を表すベクトル， $N_{dof} = N(1 + N_e)$ はシステムの自由度である． M ， h は 2.4 節の計算法により効率良く求めることができる．柔軟マルチボディシステムは一般に座標数よりも制御入力の方が少ない劣駆動系になる．実際に制御可能な関節駆動トルク成分 τ_i^j を集めた $u = [\tau_1^j \ \tau_2^j \ \cdots \ \tau_N^j]^T \in R^N$ を定義すると， u と τ の関係は $\tau = Bu$ のように表せる．ここで， $B \in R^{N_{dof} \times N}$ は駆動成分に対応する要素が 1，非駆動成分に対応する要素が 0 のブール行列である．さらに，状態変数を $x = [q^T \ \dot{q}^T]^T \in R^{2N_{dof}}$ と定義すると，状態方程式

$$\dot{x} = f(x, u) \quad (10)$$

を得る．境界条件は初期時刻 $t = 0$ で $x(0) = x_0$ ，終端時刻 $t = t_f$ で $x(t_f) = x_f$ が指定されたとする．評価関数は次式

$$J = \int_0^{t_f} F(x, u) dt \quad (11)$$

のように与えられるとする．このとき，最適軌道計画問題は，式 (10) のシステムに対して，境界条件を満足し，式 (11) の評価関数を最小にする制御入力 $u(t)$ を求めることとなる．

4. 提案する最適軌道計画アルゴリズム

提案する計算法の流れは概略以下ようになる (図 2 参照)．Step.1) 入力 u を仮定する，Step.2) 状態方程式 (10) を解いて動力学シミュレーションを行う，Step.3) 得られた軌道に沿って感度解析を行う，Step.4) 評価関数を減少させる修正量 δu を計算する．Step.5) 入力を $u \leftarrow u + \delta u$ のように修正する，Step.6) 収束判定条件が満たされるまで Step.2) に戻る．

Step.2) の動力学シミュレーションは，第 2 章で説明したリカーシブ動力学計算法を利用して行う．また，Step.4) の計算には，著者が先に提案している階層勾配法 [2] を用いる．以下では，Step.3) の感度解析について説明する．最適制御計算を行うためには $\partial f / \partial x$ と $\partial f / \partial u$ が必要であるが， $\partial f / \partial u$ の計算は容易であるので，ここでは $\partial f / \partial x$ に焦点をあてる．

式 (10) より， $\partial f / \partial x$ は次式のように表せる．

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \dot{q}}{\partial q} & \frac{\partial \ddot{q}}{\partial \dot{q}} \\ \frac{\partial \ddot{q}}{\partial q} & \frac{\partial \ddot{q}}{\partial \dot{q}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} O & E \\ \frac{\partial \ddot{q}}{\partial q} & \frac{\partial \ddot{q}}{\partial \dot{q}} \end{bmatrix} \quad (12)$$

したがって， $\partial \ddot{q} / \partial q$ ， $\partial \ddot{q} / \partial \dot{q}$ を計算する必要がある．著者は既報 [2] で次式の関係が成り立つことを証明している．

$$\frac{\partial \ddot{q}}{\partial q} = -M^{-1} \frac{\partial \tau}{\partial q}, \quad \frac{\partial \ddot{q}}{\partial \dot{q}} = -M^{-1} \frac{\partial \tau}{\partial \dot{q}} \quad (13)$$

上式は，柔軟 MBS の場合にも成立する．これより， $\partial \tau / \partial q$ ， $\partial \tau / \partial \dot{q}$ を計算できればよいことがわかる．本研究では，これらを第 2 章のリカーシブ動力学計算法を利用して求める．たとえば， $\partial \tau / \partial q$ の i 行 k 列の位置にあるブロック行列

$$\frac{\partial \tau_i}{\partial q_k} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \tau_i}{\partial q_k^j} & \frac{\partial \tau_i}{\partial q_k^{e1}} & \cdots & \frac{\partial \tau_i}{\partial q_k^{eN_e}} \end{bmatrix} \quad (14)$$

の各要素は，以下の手順によって計算することができる．

Fig.2 Flow of the optimal trajectory planning algorithm

1) $i = 1$ から N ， $k = 1$ から N まで以下の計算を行う．

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_i}{\partial q_k^j} &= \frac{\partial C_i}{\partial q_k^j} v_{i-1} + C_i \frac{\partial v_{i-1}}{\partial q_k^j} \\ \frac{\partial v_i}{\partial q_k^{e\alpha}} &= \frac{\partial C_i}{\partial q_k^{e\alpha}} v_{i-1} + C_i \frac{\partial v_{i-1}}{\partial q_k^{e\alpha}} \quad (\alpha = 1, \dots, N_e) \\ \frac{\partial a_i}{\partial q_k^j} &= \frac{\partial C_i}{\partial q_k^j} a_{i-1} + C_i \frac{\partial a_{i-1}}{\partial q_k^j} + \frac{\partial \beta_i}{\partial q_k^j} \\ \frac{\partial a_i}{\partial q_k^{e\alpha}} &= \frac{\partial C_i}{\partial q_k^{e\alpha}} a_{i-1} + C_i \frac{\partial a_{i-1}}{\partial q_k^{e\alpha}} + \frac{\partial \beta_i}{\partial q_k^{e\alpha}} \quad (\alpha = 1, \dots, N_e) \end{aligned}$$

2) $i = N$ から 1， $k = 1$ から N まで以下の計算を行う．

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_i^j}{\partial q_k^j} &= M_i \frac{\partial a_i}{\partial q_k^j} - \frac{\partial F_i^{other}}{\partial q_k^j} + \frac{\partial C_{i+1}^T}{\partial q_k^j} F_{i+1}^j + C_{i+1}^T \frac{\partial F_{i+1}^j}{\partial q_k^j} \\ \frac{\partial F_i^j}{\partial q_k^{e\alpha}} &= \frac{\partial M_i}{\partial q_k^{e\alpha}} a_i + M_i \frac{\partial a_i}{\partial q_k^{e\alpha}} + \frac{\partial h_i}{\partial q_k^{e\alpha}} + \frac{\partial k_i}{\partial q_k^{e\alpha}} - \frac{\partial F_i^{other}}{\partial q_k^{e\alpha}} \\ &\quad + \frac{\partial C_{i+1}^T}{\partial q_k^{e\alpha}} F_{i+1}^j + C_{i+1}^T \frac{\partial F_{i+1}^j}{\partial q_k^{e\alpha}} \quad (\alpha = 1, \dots, N_e) \\ \frac{\partial \tau_i}{\partial q_k^j} &= J_i^T \frac{\partial F_i^j}{\partial q_k^j}, \quad \frac{\partial \tau_i}{\partial q_k^{e\alpha}} = J_i^T \frac{\partial F_i^j}{\partial q_k^{e\alpha}} \quad (\alpha = 1, \dots, N_e) \end{aligned}$$

これらの漸化式は，式 (3)，(4) と式 (7)，(8) を $q_k^j, q_k^{e\alpha}$ で偏微分することによって得られる．式中に現れる $\partial C_i / \partial q_k^j$ ， $\partial C_i / \partial q_k^{e\alpha}$ ， $\partial \beta_i / \partial q_k^j$ ， $\partial \beta_i / \partial q_k^{e\alpha}$ ， $\partial M_i / \partial q_k^j$ ， $\partial h_i / \partial q_k^j$ ， $\partial k_i / \partial q_k^j$ は事前に計算しておくことが可能である．したがって，既知の初期値 $\partial v_0 / \partial q_k^j = \partial v_0 / \partial q_k^{e\alpha} = \partial a_0 / \partial q_k^j = \partial a_0 / \partial q_k^{e\alpha} = 0$ ， $\partial F_{N+1}^j / \partial q_k^j = \partial F_{N+1}^j / \partial q_k^{e\alpha} = 0$ から始めて上記の漸化式を順次解くことにより，偏微分計算を一切行うことなく，代数的に $\partial \tau / \partial q$ を求めることができる． $\partial \tau / \partial \dot{q}$ も同様の方法により計算することができる．

5. おわりに

本稿では，柔軟 MBS の汎用的な最適軌道計画アルゴリズムを提案した．提案手法によれば機構パラメータ，境界条件，および評価関数を入力するだけで，任意の柔軟 MBS の最適軌道計算を実行できるため有用であると考えられる．謝辞：本研究は科研費 (24760191) の助成を受けたものである．

参考文献

- [1] 岩村，杉山，佐藤，上田：柔軟マニピュレータのリカーシブ動力学計算法，日本機械学会機械力学計測制御部門講演会 (D&D2012) 講演論文集，No.837，USB 12pages.
- [2] 岩村，他 3 名：マルチボディシステムの汎用的な最適軌道計画アルゴリズム (第 1 報，開ループ系の場合)，日本機械学会論文集 C 編，Vol. 77，No. 774，342-355，2011.