論文要報

衝撃的間歇モーメントによる車軸の振り振動に就て⁽¹⁾

(昭和 18 年 6 月 23 日 関西支部第 182 回講演會に於て講演)

正員 片岡 秀吉⁽²⁾

1. 摘要 軸の両端における車に大きしく、方向反対な衝撃的間歇振りモーメントが作用する場合、軸の振り振動を考へるには節断面の所を固定し、一端に車を有する軸に衝撃的間歇モーメントが作用したときの振動を考へればよい⁽³⁾。依て一端固定の丸棒の他端に剛体円板を固定し、この円板に衝撃的間歇振りモーメント N (第 1 図) が作用したときに生ずる振り振動を厳密に求めた。

第 1 図

2. 基礎方程式 半径 r , 長さ l なる棒の一端 $x=0$ を固定し、他端に極慣性能率 I なる剛体板を固定し、この板にモーメント N が作用したとすれば

$$\text{振動の方程式 棒 } \rho \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} = G \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}, \quad 0 < x < l \quad \dots\dots(1)$$

$$\text{剛体板 } I \frac{d^2 \theta_0}{dt^2} = -G \frac{\pi r^4}{2} \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} \right)_{x=l} + N \dots\dots(2)$$

境界条件

$$x=0 \text{ に於ては } \theta=0 \quad \dots\dots(3)$$

$$x=l \text{ に於ては } \theta=\theta_0 \quad \dots\dots(4)$$

始条件

$$t < 0 \text{ に対して } \frac{\partial \theta}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial \theta_0}{\partial t} = 0 \quad \dots\dots(5), (6)$$

$$t \leq 0 \text{ に対して } \theta = 0, \quad \theta_0 = 0 \quad \dots\dots(7), (8)$$

茲に ρ = 棒の密度、 G = 棒の横弾性係数
 θ = 棒の角変位、 θ_0 = 剛体板の角変位

$$N = \frac{N_0}{2\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \int_{(w)} \frac{e^{-ia[t-n(T_1+T_2)+T_1]} - e^{-ia[t-n(T_1+T_2)]}}{\alpha} d\alpha$$

$$\text{但し } n(T_1+T_2) < t < (n+1)(T_1+T_2)$$

以上に於ては棒の質量を剛体の質量に対して省略したがこれ

を考慮する必要のあるときには剛体の重量に棒の重量の $1/3$ を附加すればよい⁽⁴⁾。

N の積分路 W は原点及び第 3 節に述べる $F(\alpha)=0$ の実根を中心とする微小円の上側の半円周及びこれ等を結ぶ実軸の部分より成るものである。 (W) は W に沿ふて左方から右方への積分を又 $(-W)$ は W に沿ふて右方から左方への積分を表はすものとする。

第 2 図

N は一定の振りモーメント N_0 が作用し始める各瞬間と作用を終る各瞬間に於ては $N_0/2$ を表はすがその間の時刻には N_0 を表はし、その他の時刻即ち N_0 が作用しない総ての時刻には零を表はしてゐる。依て厳密に云へば近似的表示である (第 2 図)。

3. 解法 (1), (2), (3) 及び (4) から容易に次の結果を導くことが出来る。

$$\theta = \frac{N_0}{2\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \int_{(-w)} \frac{\sin(\sqrt{\rho/G} \alpha x)}{\alpha \sin(\sqrt{\rho/G} \alpha l)} F(\alpha) e^{-ia[t-n(T_1+T_2)+T_1]} - e^{-ia[t-n(T_1+T_2)]} d\alpha$$

$$\theta_0 = (\theta)_{x=l}$$

$$\text{茲に } F(\alpha) = \alpha^2 I - (\pi/2) \sqrt{\rho G} r^4 \alpha \cot(\sqrt{\rho/G} \alpha l)$$

$\alpha=0$ を中心とし、半径 $R=\infty$ なる円の上側の半円周を K_0 , 下側の半円周を K_u とすれば K_0 又は K_u 上に於ては

$$F(\alpha) \sim R^2 e^{i2\pi} I, \quad \Re(\alpha) = \varphi$$

$$\left| \frac{\sin(\sqrt{\rho/G} \alpha x)}{\sin(\sqrt{\rho/G} \alpha l)} \right| \sim \frac{e^{\mp \sqrt{\rho/G} R(l-x) \sin \varphi}}{2}$$

但し複号中上側の記号は K_0 上に於て、下側の記号は K_u 上に於て用ふる。

$$e^{-ia\tau} = e^{-iR\tau \cos \varphi} \{ \sinh(R\tau \sin \varphi) + \cosh(R\tau \sin \varphi) \}$$

今 τ が正るときには K_u , τ が負るときには K_0 を用ふるときは $\tau \sin \varphi < 0$

依て $e^{-ia\tau} \sim 0$

(4) 脚註 (3) 84 頁。

(1) Über einer Torsionsschwingungen von Wellen beim intermittierenden Periodischstossmoment.

(2) Hidekiti KATAOKA, Mitglied. Kōbe Technische Hochschule. 神戸高等工業学校。

(3) S. Timoshenko, Vibration Problems in Engineering, 2nd Edition. p. 11.

茲に $\tau = t - \{n(T_1 + T_2) + T_1\}$ 又は $t - n(T_1 + T_2)$
故に

$$\frac{N_0}{2\pi} \oint_{(K_0), \text{又は } (K_u)} \frac{\sin(\sqrt{\rho/G} \alpha x)}{\alpha \sin(\sqrt{\rho/G} \alpha l) F(\alpha)} \\ \times \sum_{n=0}^{\infty} \{e^{-i\alpha[t - \{n(T_1 + T_2) + T_1\}]} - e^{-i\alpha[t - n(T_1 + T_2)]}\} d\alpha = 0$$

但し $\tau > 0$ の時は K_u , $\tau < 0$ の時は K_0 を用ひるものとする。

今 K_0 と $(-W)$ とよりなる閉積分路を Q , K_u と $(-W)$ とよりなる閉積分路を S とする。 $t < 0$ なるときは勿論 $\tau < 0$ なる故この場合には閉路 Q をとれば Q 内に於ては被積分函数が正則であるから $t < 0$ の場合には

$$\theta = \frac{N_0}{2\pi} \oint_{(-W)} [\] d\alpha = \frac{N_0}{2\pi} \oint_{(Q)} [\] d\alpha = 0$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{N_0}{2\pi} \oint_{(-W)} (-i\alpha) [\] d\alpha \\ = \frac{N_0}{2\pi} \oint_{(Q)} (-i\alpha) [\] d\alpha = 0$$

茲に

$$[\] = \frac{\sin(\sqrt{\rho/G} \alpha x)}{\alpha \sin(\sqrt{\rho/G} \alpha l) F(\alpha)} \\ \times \sum_{n=0}^{\infty} \{e^{-i\alpha[t - \{n(T_1 + T_2) + T_1\}]} - e^{-i\alpha[t - n(T_1 + T_2)]}\}$$

依て始条件 (5) 及び (7) は $t < 0$ に対して成立する。 $\theta_0 = (\theta)_{t=0}$, $\partial \theta_0 / \partial t = (\partial \theta / \partial t)_{t=0}$ であるから $t < 0$ に対して (6) 及び (8) を満足する。 $t = 0$ に対する始条件の吟味は第 5 節に譲る。

4. 極の吟味 θ の極は $\alpha = 0$ 及び $F(\alpha) = 0$ の根である。今 $\alpha l = \sqrt{G/\rho} \xi$ とおけば

$$F(\alpha) = \frac{GI\xi}{\rho l^2} \cot \xi (\xi \tan \xi - c) \quad \text{茲に } c = \frac{\pi \rho l^4}{2I}$$

$$F(0) = -\frac{GIc}{\rho l^2} \lim_{\xi \rightarrow 0} \xi \cot \xi = -\frac{GIc}{\rho l^2} \neq 0$$

依て $F(\alpha) = 0$ は $\alpha = 0$ の根を有しない。

次に $\cot \xi = 0$ の根 $\xi = (\pi/2)(2m+1)$ は

$$[F(\alpha)]_{\alpha=(1/l)\sqrt{G/\rho}(\pi/2)(2m+1)} \\ = \left[\frac{GI}{l^2 \rho} \xi^2 \cot \xi \tan \xi \right]_{\xi=(\pi/2)(2m+1)} \\ = \frac{GI}{l^2 \rho} \{(\pi/2)(2m+1)\}^2 \neq 0$$

従て $F(\alpha) = 0$ は $\xi \tan \xi = c$ の根のみを有することとなる。

今 $\xi = i\lambda$ とおけば $\xi \tan \xi = -\lambda \tanh \lambda = c$

然るに $-\lambda \tanh \lambda$ は λ が実数なる限り負にして正値 c に等しくならない。故に $F(\alpha) = 0$ は純虚根を有しない。

最後に $U = \sin(x/l \xi)$ とおけば

$$(d^2 U / dx^2) + (\xi^2 / l^2) U = 0; \quad 0 < x < l \\ U = 0; \quad x = 0$$

U の内の ξ に η を代入したものを V とすれば

$$(\xi^2 - \eta^2) \int_0^l U V dx = l \cos \xi \cos \eta (\eta \tan \eta - \xi \tan \xi)$$

今若し ξ 及び η を $\xi \tan \xi = c$ の相異なる 2 根とすれば

$$\int_0^l U V dx = 0$$

従て ξ, η は共軛複素数になり得ない。即ち $F(\alpha) = 0$ は複素数根を有しない。結局 $F(\alpha) = 0$ 従て $\xi \tan \xi = c$ は実根のみを有し而も正根と負根は数値が相等しいものが対をなし、根の数は無数である。 c が小さいときには⁽⁵⁾

$$\xi_0 = \sqrt{c} \left(1 - \frac{1}{6}c + \frac{11}{360}c^2 - \frac{17}{5040}c^3 - \frac{281}{604800}c^4 + \dots \right)$$

$$\xi_s = \pi s + \frac{c}{\pi s} - \frac{1}{(\pi s)^3} \left(c^2 + \frac{1}{3}c^3 \right) + \dots$$

$$(s=1, 2, 3, \dots)$$

茲に ξ_s は $\xi \tan \xi = c$ の $(s+1)$ 番目の正根である。

5. 解の展開

$$\theta = \frac{N_0}{2\pi} \oint_{(S)} \frac{\sin(\sqrt{\rho/G} \alpha x)}{\alpha \sin(\sqrt{\rho/G} \alpha l) F(\alpha)} \\ \times \left\{ \sum_{n=0}^{n-1} (e^{-i\alpha[t - \{n(T_1 + T_2) + T_1\}]} - e^{-i\alpha[t - n(T_1 + T_2)]}) - e^{-i\alpha[t - n(T_1 + T_2)]} \right\} d\alpha \\ + \oint_{(-Q)} \frac{\sin(\sqrt{\rho/G} \alpha x)}{\alpha \sin(\sqrt{\rho/G} \alpha l) F(\alpha)} \\ \times e^{-i\alpha[t - \{n(T_1 + T_2) + T_1\}]} d\alpha$$

但し $n(T_1 + T_2) < t < n(T_1 + T_2) + T_1$

$$\theta = \frac{N_0}{2\pi} \left[\oint_{(S)} \frac{\sin(\sqrt{\rho/G} \alpha x)}{\alpha \sin(\sqrt{\rho/G} \alpha l) F(\alpha)} \right. \\ \times \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} (e^{-i\alpha[t - \{n(T_1 + T_2) + T_1\}]} - e^{-i\alpha[t - n(T_1 + T_2)]}) \right\} d\alpha$$

但し $n(T_1 + T_2) + T_1 < t < (n+1)(T_1 + T_2)$

然るに

$$e^{-i\alpha[t - \{n(T_1 + T_2) + T_1\}]} - e^{-i\alpha[t - n(T_1 + T_2)]} \\ = 2 \sin(\alpha T_1/2) [\sin \alpha \{t - n(T_1 + T_2) - (T_1/2)\} \\ + i \cos \alpha \{t - n(T_1 + T_2) - (T_1/2)\}]$$

依て

$$\theta = \frac{2N_0 x}{G\pi l^4} + \frac{4N_0 l^2 \rho}{GI} \sum_{s=0}^{\infty} \left[\frac{\sin(\xi_s/l)x}{\sin \xi_s \cdot \xi_s^2 \{1 + c + (\xi_s^2/c)\}} \right. \\ \times \left\{ \sin(T_1/2l) \sqrt{G/\rho} \xi_s \sum_{n=0}^{n-1} \sin[(1/l) \sqrt{G/\rho} \xi_s] \right. \\ \times [t - \{n(T_1 + T_2) + (T_1/2)\}] \\ \left. \left. - (1/2) \cos[(1/l) \sqrt{G/\rho} \xi_s \{t - n(T_1 + T_2)\}]\right\} \right]$$

但し $n(T_1 + T_2) < t < n(T_1 + T_2) + T_1$

$$\theta = 0 + \frac{4N_0 l^2 \rho}{GI} \sum_{s=0}^{\infty} \left[\frac{\sin(\xi_s/l)x \cdot \sin(T_1/2l) \sqrt{G/\rho} \xi_s}{\sin \xi_s \cdot \xi_s^2 \{1 + c + (\xi_s^2/c)\}} \right. \\ \times \sum_{n=0}^{\infty} \sin[(1/l) \sqrt{G/\rho} \xi_s \{t - \{n(T_1 + T_2) + (T_1/2)\}\}]]$$

但し $n(T_1 + T_2) + T_1 < t < (n+1)(T_1 + T_2)$

θ の第 1 項は強制の項であり、第 2 項は自由振動である。今自由振動の振動数を ν_s とすれば

$$\nu_s = (1/2\pi) \{ (1/l) \sqrt{G/\rho} \xi_s \} = \alpha_s / 2\pi$$

従て c が数値的に小である場合には

(5) I. Kobayasi, Japanese Journal of Physics, V, 47, (1928).

$$\nu_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\pi Gr^4}{2II}} \left(1 - \frac{1}{6}c + \frac{11}{360}c^2 - \frac{17}{5040}c^3 + \dots \right)$$

$$\nu_s = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\pi Gr^4}{2II}} \cdot \frac{1}{\sqrt{c}} [\pi s + (c/\pi s) - 1/(\pi s)^3 \{c^2 + (c^3/3)\} + \dots]$$

$$s = 1, 2, 3, \dots$$

又

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sin \left[(1/l) \sqrt{G/\rho} \xi_p [t - \{n(T_1 + T_2) + (T_1/2)\}] \right]$$

$$= \begin{cases} \frac{\sin \alpha_p \left\{ t - \frac{(n+1)T_1 + nT_2}{2} \right\} \sin \alpha_p \frac{(n+1)(T_1 + T_2)}{2}}{\sin \alpha_p \{(T_1 + T_2)/2\}}; \\ \nu_p \neq \{m/(T_1 + T_2)\} \text{ のとき,} \\ (n+1) \sin \alpha_p \left\{ t - (T_1/2) \right\}; \nu_p = \{m/(T_1 + T_2)\} \text{ のとき,} \end{cases}$$

茲に m は零又は任意の正整数である。従て $\nu_s \neq \{m/(T_1 + T_2)\}$, $s = 0, 1, 2, \dots$ なる場合には

$$\theta = \begin{cases} \frac{2N_0 x}{G\pi r^4} + \sum_{s=0}^{\infty} \left(A_s(x) \sin \{ \pi n (T_1 + T_2) \nu_s \} \right. \\ \quad \times \sin \left[2\pi \nu_s \left\{ t - \frac{n(T_1 + T_2) - T_2}{2} \right\} \right] \\ \quad \left. - \bar{A}_s(x) \cos [2\pi \nu_s \{ t - n(T_1 + T_2) \}] \right) \\ \quad \text{但し } n(T_1 + T_2) < t < n(T_1 + T_2) + T_1 \\ t=0 \text{ のときは } n=0 \text{ となり上式は} \\ \quad \theta = \frac{2N_0 x}{G\pi r^4} - \sum_{s=0}^{\infty} \bar{A}_s(x) = 0 \\ \text{依て } t=0 \text{ のとき } \theta=0 \text{ の条件を満足する。} \\ 0 + \sum_{s=0}^{\infty} A_s(x) \sin \{ \pi (n+1) (T_1 + T_2) \nu_s \} \\ \quad \times \sin \left[2\pi \nu_s \left\{ t - \frac{n(T_1 + T_2) + T_1}{2} \right\} \right] \\ \quad \text{但し } n(T_1 + T_2) + T_1 < t < (n+1)(T_1 + T_2) \end{cases}$$

茲に

$$\bar{A}_s(x) = \frac{2N_0 l^2 \rho}{GI} \frac{\sin(\xi_s/l) x}{\sin \xi_s \cdot \{1 + c + (\xi_s^2/c)\} \xi_s^2}$$

$$A_s(x) = 2 \frac{\sin(\pi T_1 \nu_s)}{\sin\{\pi(T_1 + T_2) \nu_s\}} \bar{A}_s(x)$$

若し又 $\nu_p = m/(T_1 + T_2)$ なる場合には

$$\theta = \begin{cases} \frac{2N_0 x}{G\pi r^4} + \sum_{s=0}^{\infty} \left[A_s(x) \sin \{ \pi n (T_1 + T_2) \nu_s \} \right. \\ \quad \times \sin \left[2\pi \nu_s \left\{ t - \frac{n(T_1 + T_2) - T_2}{2} \right\} \right] \\ \quad \left. - \bar{A}_s(x) \cos [2\pi \nu_s \{ t - n(T_1 + T_2) \}] \right] \\ \quad + \bar{A}_p(x) \left[2n \sin \left(\frac{m T_1}{T_1 + T_2} \pi \right) \sin \left\{ 2\pi \frac{m}{T_1 + T_2} \left(t - \frac{T_1}{2} \right) \right\} \right. \\ \quad \left. - \cos \left\{ 2\pi \frac{m}{T_1 + T_2} \{ t - n(T_1 + T_2) \} \right\} \right] \\ \quad \text{但し } n(T_1 + T_2) < t < n(T_1 + T_2) + T_1 \\ 0 + \sum_{s=0}^{\infty} A_s(x) \sin \{ \pi (n+1) (T_1 + T_2) \nu_s \} \\ \quad \times \sin \left[2\pi \nu_s \left\{ t - \frac{n(T_1 + T_2) + T_1}{2} \right\} \right] + 2(n+1) \\ \quad \times \sin \left(\frac{m T_1}{T_1 + T_2} \pi \right) \bar{A}_p(x) \sin \left\{ 2\pi \frac{m}{T_1 + T_2} \left(t - \frac{T_1}{2} \right) \right\} \\ \quad \text{但し } n(T_1 + T_2) + T_1 < t < (n+1)(T_1 + T_2) \end{cases}$$

上式の θ の内には振幅中に n 又は $(n+1)$ なる因数を含む項がある。この項は振幅が時間と共に増して共振現象を起す。時間が $T_1 + T_2$ に比して十分大きくなれば t は n に比例すると考えられるから共振現象の振幅は時間に比例して増大する型の共鳴である。

フライス又はリーマの刃の各間隔を等しくしないときはモーメントの休止時間 T_2 が各の場合に於て相異なる場合に相当し、共振を起す振動の次数 p が一つに固定せずして種々に変化するから共振が起り難いことが上の結果から窺はれる。

$\nu_p = \{m/(T_1 + T_2)\}$ なる場合に於て $T_1 = T_2 = T$ にして m が偶数なるときは $T = (m/2)(1/\nu_p)$

これ即ち T が $(p+1)$ 次の自由振動の週期の倍数に等しい場合にして、この場合には

$$\sin \left(\frac{m T_1}{T_1 + T_2} \pi \right) = \sin \left(m \frac{\pi}{2} \right) = 0$$

従て

$$\theta = \begin{cases} \frac{2N_0 x}{G\pi r^4} + \sum_{s=0}^{\infty} \left(A_s(x) \sin \{ 2\pi n T \nu_s \} \right. \\ \quad \times \sin \left[2\pi \nu_s \left\{ t - \frac{(2n-1)T}{2} \right\} \right] - \bar{A}_s(x) \cos [2\pi \nu_s \\ \quad \times (t - 2nT)] - \bar{A}_p(x) \cos \left\{ \frac{\pi m}{T} (t - 2nT) \right\} \\ \quad \text{但し } 2nT < t < (2n+1)T \\ 0 + \sum_{s=0}^{\infty} A_s(x) \sin \{ 2\pi (n+1) T \nu_s \} \\ \quad \times \sin \left\{ 2\pi \nu_s \left(t - \frac{(2n+1)T}{2} \right) \right\} \\ \quad \text{但し } (2n+1)T < t < 2(n+1)T \end{cases}$$

即ち T が自由振動の週期の倍数に等しい場合には振幅は時間に無関係となり、共振は起らない。

尙又 $T_1 \ll T_2$ なる場合及び $T_1 \gg T_2$ なる場合には共に

$$\sin \left(\frac{m T_1}{T_1 + T_2} \pi \right) \approx 0$$

となるから共振は起り難く、 $T_2 \approx 0$ にして $T_1 \rightarrow 0$ 又は $T_1 \approx 0$ にして $T_2 \rightarrow 0$ なる程共振は起らない。これははすば歯車やスパイラルのフライスが振り振動の見地から卓越せる所以である。

c が小なる時には容易に次の如く展開⁽⁶⁾することが出来る。

$$\bar{A}_0(x) = \frac{2N_0 x}{\pi Gr^4} \left[1 - \frac{1}{6} \left(1 - \frac{x^2}{l^2} \right) c - \frac{1}{720} \left(41 - 20 \frac{x^2}{l^2} - 6 \frac{x^4}{l^4} \right) c^2 + \dots \right]$$

$$\bar{A}_s(x) = (-1)^s \frac{4N_0 l c}{\pi Gr^4 (\pi s)^3} \left[\left\{ 1 - \frac{4c}{(\pi s)^2} - \frac{1}{2(\pi s)^2} \left(1 + \frac{x^2}{l^2} - \frac{34}{(\pi s)^2} \right) + \dots \right\} \sin \frac{\pi s}{l} x + \frac{x c}{l \pi s} \left\{ 1 - \frac{5}{(\pi s)^2} c - \frac{5 + (x^2/l^2) - \{126/(\pi s)^2\} c^2 + \dots \right\} \cos \frac{\pi s}{l} x \right]$$

(6) Y. Nomura, Science Reports of Tohoku Uni., Anniversary Vol, series 1, (1936), p. 1.

6. 結 び 以上によつて衝撃的に作用する間歇モーメントが作用したときの振り振動を厳密に解くことが出来た。而して斯る衝撃の間歇力による共鳴現象が普通の衝撃的でない正弦又は余弦的な週期力による共鳴現象に比べて振幅の増し方に著しい相違のある点、即ち後者に於ては比較的瞬時に振幅が無限大にならんとするに反し前者に於ては大約時間に比例して振幅が増大する点を明らかにした。尚フリス又はリーマの双の間隔を等間隔にしない方が振動学的に有利なる点及び若しフリス又はリーマの双を等間隔にする場合に於

てもその間隔を適當にすれば振動的に有利な点をも窺知せしむることが出来たと思ふ。更に本文が衝撃の間歇力が作用した場合の各種振動を研究する一資料を提供し得たならば幸甚である。

最後にこの研究は財団法人谷口工業奨励會の補助を仰いで筆者の研究してゐる「機械部分の振動に関する研究」の一部である。こゝに同會の御厚意に対し深く御礼申し上げる次第である。

(昭和 18 年 3 月 23 日受付・本論文要報を以て論文に代ふ)

一元的热傳導の二体問題(第1報)⁽¹⁾

(昭和 18 年 6 月 23 日 関西支部第 132 回講演會に於て講演)

正 員 片 岡 秀 吉⁽²⁾

1. 摘要 半無限棒の一端に、熱源として加熱線輪を有し、これより毎時一定量の熱を傳導によつて供給する場合、半無限棒が異種の 2 材料より成つてゐる場合の温度を解いた。これによつて熱源と導体との間に異種材料が介在してゐる場合の影響を求むる際に役立たしめたいと思ふ。

2. 基礎方程式
材質の相異なる二つの棒 I 及び II を接合して作つた半無限棒の一端 $x=0$ (第 1 図) に熱源を有し、これより棒に傳

第 1 図

導によつて単位面積につき、単位時間毎に r なる熱量を供給する一元的热傳導の式及び条件式は次の如くである。

$$\text{熱傳導の式} \quad \frac{\partial^2 \theta_1}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha_1^2} \frac{\partial \theta_1}{\partial t}, \quad 0 < x < a \dots\dots\dots (1)$$

$$\frac{\partial^2 \theta_2}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha_2^2} \frac{\partial \theta_2}{\partial t}, \quad a < x < \infty \dots\dots\dots (2)$$

継目の条件

$$\theta_1 = \theta_2 \dots\dots\dots (3)$$

$$\lambda_1 \frac{\partial \theta_1}{\partial x} = \lambda_2 \frac{\partial \theta_2}{\partial x}, \quad x=a \dots\dots\dots (4)$$

端の条件

$$-\lambda_1 \frac{\partial \theta_1}{\partial x} = \begin{cases} r, & t > 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}, \quad x=0 \dots\dots\dots (5), (6)$$

$$\theta_2 = 0, \quad x = \infty \dots\dots\dots (7)$$

始条件

$$\theta_1 = 0, \quad t=0 \dots\dots\dots (8)$$

$$\theta_2 = 0, \quad t=0 \dots\dots\dots (9)$$

茲に λ = 熱傳導率、 $\alpha = \lambda/c\rho$,
 c = 比熱、 ρ = 密度、 θ = 温度、

第 2 図

t = 熱源の作用した時間、 x = 熱源からの距離、 a = 棒 I の長さ。

以上の諸量を表はす文字の内棒 I 及び II に関するものを夫々文字の右下に 1 及び 2 なる添数を附加してこれ等を區別した。

3. 解法 今 (1), (2), (3), (4) 及び (7) から直ちに

$$\theta_1 = \frac{1}{2\pi i} \int K \{ Ce^{\sqrt{p}/\alpha_1}(a-x) - \sqrt{p}/\alpha_2 a + De^{-\sqrt{p}/\alpha_1}(a-x) - \sqrt{p}/\alpha_2 a \} e^{pt} dp$$

$$\theta_2 = \frac{1}{2\pi i} \int K e^{-\sqrt{p}/\alpha_2} a e^{pt} dp$$

茲に $\Re(\sqrt{p}) > 0$, $C = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\alpha_1 \lambda_2}{\alpha_2 \lambda_1} \right)$, $D = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\alpha_1 \lambda_2}{\alpha_2 \lambda_1} \right)$

依て (5) 及び (6) から K 及び積分路を定めると

$$\theta_1 = \frac{1}{2\pi i} \left(\frac{r\alpha_1}{\lambda_1} \right) \int_{\Gamma} \frac{Ce^{\sqrt{p}/\alpha_1}(a-x) + De^{-\sqrt{p}/\alpha_1}(a-x)}{p\sqrt{p} \{ Ce^{\sqrt{p}/\alpha_1} - De^{-\sqrt{p}/\alpha_1} \}} e^{pt} dp \dots\dots\dots (10)$$

$$\theta_2 = \frac{1}{2\pi i} \left(\frac{r\alpha_1}{\lambda_1} \right) \int_{\Gamma} \frac{e^{-\sqrt{p}/\alpha_2}(a-x)}{p\sqrt{p} \{ Ce^{\sqrt{p}/\alpha_1} - De^{-\sqrt{p}/\alpha_1} \}} e^{pt} dp \dots\dots\dots (11)$$

(10) 及び (11) の式が始条件 (8) 及び (9) を満足することは第 4 節に於て示す。

4. 解の展開 (10) 及び (11) 式を微分すれば

$$\frac{d\theta_1}{dt} = \frac{1}{2\pi i} \left(\frac{r\alpha_1}{\lambda_1} \right) \int_{\Gamma} \frac{Ce^{\sqrt{p}/\alpha_1}(a-x) + De^{-\sqrt{p}/\alpha_1}(a-x)}{\sqrt{p} \{ Ce^{\sqrt{p}/\alpha_1} - De^{-\sqrt{p}/\alpha_1} \}} e^{pt} dp$$

$$\frac{d\theta_2}{dt} = \frac{1}{2\pi i} \left(\frac{r\alpha_1}{\lambda_1} \right) \int_{\Gamma} \frac{e^{-\sqrt{p}/\alpha_2}(a-x)}{\sqrt{p} \{ Ce^{\sqrt{p}/\alpha_1} - De^{-\sqrt{p}/\alpha_1} \}} e^{pt} dp$$

$p=0$ は分岐点にして、 $\Re(\sqrt{p}) > 0$ なるを要するから

$\Re(\sqrt{p}) = 0$ なる負の実数軸を分岐溝にとる (第 2 図)。

今 $\psi = \frac{Ce^{\sqrt{p}/\alpha_1}(a-x) + De^{-\sqrt{p}/\alpha_1}(a-x)}{\sqrt{p} \{ Ce^{\sqrt{p}/\alpha_1} - De^{-\sqrt{p}/\alpha_1} \}} e^{pt}$ とすれば

$$\oint_{(Q)} \psi dp = \int_{\Gamma} \psi dp + \int_{\Gamma'} \psi dp + \int_{(K)} \psi dp$$

[昭和 18 年 9 月]

(1) Über die Erwärmungskurve eines aus zwei verschiedenen Stoffen bestanden Stabes bei reiner Leitungswärmeabfuhr.

(2) Hidekiti KATAOKA, Mitglied. Kobe Technische Hochschule. 神戸高等工業学校。