不 連 続 制 御*

伊 沢 計 介**

1. ま え が き

いわゆる不連続制御とは、制御ループをつたわる信号のどれかが空間的あるいは時間的に不連続特性を示すものである。このような特性をもつ伝達要素の入力信号を $z(t)$ 、出力信号を $y(t)$ とすると、第1図にその不連続性が空間的なものの代表例が、第2図にその不連続性が時間的なものの例があげてある。時間的不連続伝達要素は空間的なものと区別して、とくに間欠要素ともよばれる。

これらの不連続要素の特性はそれぞれ次の式であらわされる。

空間的な不連続伝達要素

$$\text{リレー: } y(t) = \begin{cases} +A : z(t) > 0 \\ -A : z(t) < 0 \end{cases} \quad \dots\dots(1)$$

(a) リレー

(b) 中立帯 (不動帯)

(c) 飽和

(d) バックラッシュ

第1図 空間的不連続伝達要素

$$\text{中立帯: } y(t) = \begin{cases} z(t) - \Delta : z(t) > \Delta \\ 0 : -\Delta \leq z(t) \leq \Delta \\ z(t) + \Delta : z(t) < -\Delta \end{cases} \quad \dots\dots(2)$$

$$\text{飽和: } y(t) = \begin{cases} \lambda : z(t) > \lambda \\ z(t) : -\lambda \leq z(t) \leq \lambda \\ -\lambda : z(t) < -\lambda \end{cases} \quad \dots\dots(3)$$

バックラッシュ:

$$\begin{cases} \dot{y}(t) = 0 : \dot{z}(t) = 0 \text{ あるいは} \\ \dot{z}(t) \neq 0 \text{ かつ } |y(t) - z(t)| < h \\ y(t) = z(t) - h \frac{\dot{z}(t)}{|\dot{z}(t)|} : \\ \dot{z}(t) \neq 0 \text{ かつ } |y(t) - z(t)| \geq h \end{cases} \quad \dots\dots(4)$$

* 原稿受付 昭和 37 年 11 月 14 日.

** 正員, 東京工業大学 (東京都目黒区大岡山 1).

時間的な不連続伝達要素 (間欠要素)

$kT_r \leq t < (k+1)T_r$ において

第1種の間欠要素:

$$y(t) = \begin{cases} z(kT_r) : kT_r \leq t < (k+\gamma)T_r \\ 0 : (k+\gamma)T_r \leq t < (k+1)T_r \end{cases} \quad \gamma \leq 1 \quad \dots\dots\dots(5)$$

第2種の間欠要素:

$$y(t) = \begin{cases} +1 : z(kT_r) > 0, kT_r \leq t < (k+\gamma_k)T_r \\ 0 : (k+\gamma_k)T_r \leq t < (k+1)T_r \\ -1 : z(kT_r) < 0, kT_r \leq t < (k+\gamma_k)T_r \end{cases} \quad \dots\dots\dots(6-a)$$

第2図 時間的な不連続伝達要素 (間欠要素)

第3図 方形パルスは対称非線形要素の影響を受けない

$$\gamma_k \kappa |z(kT_r)|, \quad \gamma_k \leq 1 \quad \dots\dots\dots(6-b)$$

さてこのような不連続伝達要素を含む制御系を取り扱うには、解析的手段としては(1)微分方程式、(2)位相面、(3)周波数応答、(4)定差方程式、(5)パルス伝達関数、などが用いられるが、そのほかに図計算や電氣的模型も使われる。このうち(1)、(2)、(3)は空間的な不連続要素を含む系に用いられ、(3)、(4)、(5)は時間的な不連続要素を含む系に使われる。しかし(1)、(2)、(4)の方法はその制御系へ加えられる目標値や外乱が時間的に変動している場合にはあまり効果的でない。

(3)の方法は広く使いうるもので空間的な不連続要素に対しては、それに対応した記述関数 (describing function) を用いることにより⁽¹⁾連続線形の制御系の場合とほとんど類似の解析を進めることができる。

また時間的に不連続な要素 (間欠要素) を含む制御系 (間欠制御系、サンプル値制御系) においては、制御系内の信号を間欠時刻 $t = kT_r$ (第2図参照) において着目することにより、パルス周波数伝達関数を導くことができ、これまた連続線形の制御系に対するいわゆる周波数応答法とほとんど同一の取扱いができる⁽²⁾。

ところで第1図(a)および第2図(c)のような不連続要素からの出力信号は高さが一定の方形パルスとなるので、それにつづく要素が非線形であっても対称であるなら、その影響は全くない。これを第3図により示すと、もしも非線形要素の入力出力を y, y_0 とおきこの関係を

$$y_0(t) = \Phi[y(t)] \quad \dots\dots\dots(7)$$

とあらわすと、この関数 Φ が

$$\begin{cases} \Phi(0) = 0, \\ \Phi(y) = -\Phi(-y) \end{cases} \quad \dots\dots\dots(8)$$

なる対称特性をもっているなら、第1図(a)のリレー要素の次に(7)、(8)式で示される非線形要素を直列に接属したものは(1)式で A の代りに $\Phi(A)$ とおいたりリレー要素と全く同一の特性となる。また第2図(c)で示される第2種の間欠要素の次に(7)、(8)式で示される非線形要素を直列に接続したものは、第2図(c)で出力 y のとり値を $\Phi(A), 0, -\Phi(A)$ におきかえた第2種の間欠要素と全く同一である。

このように方形波状の出力信号をもつ要素はそれにつづく対称非線形要素の影響を受けない点において特筆すべ

き価値があろう。そこで、ここでは問題の対象をこのような特性をもつ不連続要素をもつ制御系に限って、その代表的解析法などについて、要点を解説することにした。

2. オンオフ形制御系

いま理想的には(1)式であらわされるような空間的に不連続な要素を含む制御系をオンオフ形制御系と呼ぶことにしよう。ところで(1)式であらわされる特性をもう少し一般的にあらわすと、これに中立帯とバックラッシュを含めて次式であらわされる。

$$y(t) = \begin{cases} A : z(t) > \Delta + h ; \text{あるいは} \\ \quad z(t) > \Delta - h, \dot{z}(t) < 0 ; \\ 0 : |z(t)| < \Delta - h ; \Delta - h < z(t) \\ \quad < \Delta + h, \dot{z}(t) > 0 ; \text{あるいは} \\ \quad -\Delta - h < z(t) < -\Delta + h, \\ \quad \dot{z}(t) < 0 ; \\ -A : z(t) < -\Delta - h ; \text{あるいは} z(t) < \\ \quad -\Delta + h, \dot{z}(t) > 0 \end{cases} \quad (9)$$

第4図は(9)式を図示したものである。ここで $\Delta = h = 0$ とするとこれは第1図(a)の特性のものとなる。

さて、いまこのようなリレー要素を含む単一ループの制御系を考えてみる。これを第5図(a)に示す。ここで $G_1(s)$, $G_2(s)$ および $H(s)$ は線形連続な要素の伝達関数とする。第5図(a)は容易に等価変換されて、第5図(b)のように直結フィードバック(unity feedback)をもった系におきかえられる*。

そこで、このような制御系の解析は本質的には第6図のような系を扱う場合と大差ない。

3. 記述関数および安定限界線

第4図に示される要素の記述関数を求めてみる。つまり、 $z(t)$ として

第4図 リレー要素の一般形(正ヒステリシス)

* この考え方は第5図でリレー要素が他の不連続要素であっても同一である。

$$z(t) = a_i \sin \omega t \quad (10)$$

としたとき、第4図あるいは(9)式であらわされる要素の出力 $y(t)$ はフーリエ級数の形で

$$y(t) = a_{01} \sin(\omega t + \theta_1) + a_{03} \sin(3\omega t + \theta_3) + a_{05} \sin(5\omega t + \theta_5) + \dots \quad (11)$$

と示される。このうち高次の項(3ω , 5ω , ...)を、角周波数としてもつものは、(i)これが第6図においてわかるとおり、伝達要素 $G(s)$ にはいり、その出力が再びフィードバックされてリレー要素への入力信号 z に影響を与えていること、(ii)および一般に伝達要素 $G(s)$ はそれへの入力信号の角周波数が大きくなるにつれて、出力信号の振幅はすみやかに0になること、を考えあわせると、(11)式の右辺第2項以下は一応無視して考察を進めることができる。これが Goldfarb⁽³⁾, Kochenburger⁽¹⁾ らに始まる記述関数を用いた周波数応答法の原理である。

このように考えたとき、第4図あるいは(9)式で示されるリレー要素の記述関数は、(10), (11)式から

$$\frac{a_{01}}{a_i} e^{j\theta_1} \quad (12)$$

であらわされる。この場合の記述関数を G_R とすると、 $a_i > \Delta + h$ なら

$$\left. \begin{aligned} G_R &= r e^{j\theta} \\ r &= \frac{\phi A}{\pi a_i} \sin\left(\frac{\beta + \phi}{2}\right) \\ \theta &= -\left(\frac{\psi - \beta}{2}\right) \\ \beta &= \cos^{-1}\left(\frac{\Delta + h}{a_i}\right), \quad \psi = \cos^{-1}\left(\frac{\Delta - h}{a_i}\right) \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

第6図の系の一巡周波数伝達関数を $G_L(j\omega)$ とおくと、この記述関数を用いて

(a)

(b)

第5図 オンオフ形制御系の等価変換

第6図 オンオフ形制御系の基本形

$$G_L(j\omega) = G_R \cdot G(j\omega) \quad \dots\dots\dots (14)$$

と示されるから、(13) 式から

$$-\frac{1}{G_R} = \frac{1}{r} e^{-j(\pi+\theta)} \quad \dots\dots\dots (15)$$

のゲイン位相図を描く、つまり縦軸に (13) 式の $1/r$ の dB 値、横軸に $-180^\circ - \theta^\circ$ をとった曲線を入力振幅 a_i の関数として描くと、この曲線はいわば安定限界線であって、これよりも右下に $G(j\omega)$ のゲイン位相図があれば、この系は安定である。

さて (13) 式で

$$\alpha = \frac{h}{A}, \quad \xi = \frac{A}{a_i}, \quad \frac{A}{A} = k \quad \dots\dots\dots (16)$$

とおくと (15) 式の右辺の絶対値と偏角は次のようになる。

$$\frac{1}{r} = \frac{\pi}{\left[4k\xi \sin \left[\frac{1}{2} \cos^{-1} \{ (1+\alpha)\xi \} \right] + \frac{1}{2} \cos^{-1} \{ (1-\alpha)\xi \} \right]} \quad \dots\dots\dots (17)$$

$$\begin{aligned} -180^\circ - \theta = & -180^\circ + \frac{1}{2} \cos^{-1} \{ (1+\alpha)\xi \} \\ & - \frac{1}{2} \cos^{-1} \{ (1-\alpha)\xi \} \quad \dots\dots\dots (18) \end{aligned}$$

(17), (18) 式であらわされるものをゲイン位相図に描いたものが第 7 図である*。ここでは (16) 式で $k=1$ としてある。 $k>1$ のときは k の dB 値だけこの安定限界線は下にさがり、 $k<1$ のときは上にあがる。第 7 図には (16) 式の $\alpha=h/A$ の値として 0.2, 0.4, 1.0 の三とおりの場合が示されており、かつ $k=1$ としてあるが、このとき図中の破線のように第 6 図あるいは (14) 式の $G(j\omega)$ のゲイン位相図が描かれているなら、安定である。またこの図から各安定限界線と $G(j\omega)$ のゲイン位相図との縦方向の最短距離を測れば、それだけ k の値を増加することが安定の範囲内で可能である。たとえば $\alpha=1.0$ の場合にはその最短距離は約 4.5 dB と読みとれるから、 k の値としては約 1.7 までとることができる。しかし、系に適度の安定度をもたせるために、この距離をもしも 6 dB に選んだとすると、 k の値は 1 より小さく約 0.85 に設計することになる。

さて第 7 図の安定限界線と第 4 図に示したリレー要素の特性との関係をしらべてみよう。まずヒステリシス h を増加することはパラメータ α を増加すること

* (17) 式で $(1+\alpha)\xi \leq 1$ であるから、 ξ の値には上限があり、これを ξ_u とすると $\xi_u = \frac{1}{1+\alpha}$ このときの r の値および θ の値を r_u, θ_u とすると $r_u = \frac{4}{\pi} k \xi_u \sqrt{\frac{\alpha}{(1+\alpha)^2}}$, $\theta_u = -\sin^{-1} \left(\sqrt{\frac{\alpha}{1+\alpha}} \right)$

になるから、第 7 図に破線で示されるような $G(j\omega)$ に対しては (このような左下りの曲線になる場合は普通である) h が大きくなるにつれて安定度は劣化する。次に中立帯 A の影響についてみると、(16), (17) 式および第 7 図からわかるように、 h/A の比を一定に保って A を大きくすると k は小さくなり、安定限界線はそのまの形を保持して上に移行するから、あきらかに安定度が增大する。しかし h を一定にしておいて A を小さくすると α が增大すると同時に k も増大するので、安定度は一概にはいいえないが減少的である。もちろん $G(j\omega)$ の曲線の傾きも考えあわせる必要がある。

4. オンオフ制御系の特性補償

4.1 直列補償 いま第 6 図の制御系においてリレーのゲイン* A あるいは線形部のゲインを増大させたとしても、安定限界曲線と線形部周波数特性 $G(j\omega)$ の曲線とが交わるようになる (第 8 図)。

まず $G(j\omega)$ と安定限界線が図のように P 点および Q 点で交わるとすると、P 点より左上の安定限界線に対応するようリレーへの入力振幅 (大きい) や Q 点より右上の安定限界線に対応するようリレーへの入力振幅 (小さい) に対して、この制御系は安定である。つまり両者ともその振幅は減少する。しかし PQ 間の安定限界線に対応するリレーへの入力振幅に対しては、この系は不安定であるから、その振幅は増大する。

したがって Q 点に対応するリレー入力振幅より大きな振幅のものはついには P 点に対応するものにおちつく。また Q 点に対するそれより小さな振幅のものはだ

第 7 図 安定限界線 (正ヒステリシスの場合)

* リレーの出力の大きさ A は厳密にはゲインとは呼べないであろうが、ここでは便宜上このようによぶことにする。

んだん減少してしまう。

P 点に対応する持続振動は動的に安定であって、その振動角周波数は P 点においても $G(j\omega)$ 曲線の ω の値である。この持続振動の振幅を減少させるには $G(j\omega)$ 曲線を部分的に第 8 図の (a) あるいは (b) のようにかえてやることが考えられる。具体的には $G(j\omega)$ をある適当な周波数範囲において、その位相を進めればよい。図から明らかなように、(b) のほうが (a) よりその位相進めの補償が大きい。そして、(a) の場合には持続振動の振幅は P 点に対応するものから P' 点に対応するものまで減少しているが、(b) の補償を行なうと持続振動すら消滅する。このような位相進み補償 (phase advance compensation) は通常線形な要素を第 6 図あるいは第 7 図の制御ループにそう入することにより達せられる。

以上のような線形部 $G(j\omega)$ の特性を変化させて特性を改善する線形補償のほかに、リレー特性自身を改良する方法も考えられる。たとえば逆ヒステリシスの利用はその一つである⁽⁴⁾。そのときのリレー特性は第 9 図のようなものとなり、 $G(j\omega)$ のゲインも通常のリレー特性の場合よりも大きくすることが可能である。

いま第 9 図のような逆ヒステリシスリレーの記述関数の大きさを r_R 、位相角を θ_R とすると入力振幅を a_i とすると、 $a_i > \Delta + h$ のとき

$$\left. \begin{aligned} r_R &= \frac{\psi A}{\pi a_i} \sin\left(\frac{\psi + \beta}{2}\right) \\ \theta_R &= \frac{\psi - \beta}{2} \\ \beta &= \cos^{-1}\left(\frac{\Delta + h}{a_i}\right), \quad \psi = \cos^{-1}\left(\frac{\Delta - h}{a_i}\right) \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

この式を通常ヒステリシスをもったリレーの記述関数を示す (13) 式と比較すると、ゲイン特性は全く同一であって、位相角もその絶対値は両者とも一致していることが知れる。

第 8 図 オンオフ形制御系の線形補償

第 10 図はこの逆ヒステリシスのあるリレーを用いて制御系を構成したときの線形部の一巡伝達関数 $G(j\omega)$ に対する安定限界線が正ヒステリシスの場合に比べて、この系の安定度を増大することを示している。

4.2 フィードバック補償 さていままでは第 6 図に示される基本形において線形部 $G(j\omega)$ とリレー要素とが直列に結合されている場合のみを考えた。そしてこの場合には、線形部に位相進み特性を付加するかあるいはリレー要素に逆ヒステリシス特性をもたせることにより、その系の制御性の向上が期待されることをたしかめた。ところで逆ヒステリシスリレー要素の記述関数 (19) 式あるいはその安定限界線 (第 10 図) からわかるとおり、これも逆ヒステリシスという非線形特性を利用して、位相進み補償を行なっていると見ることができる。つまり、第 5 図あるいは第 6 図に一般的に示されるようなオンオフ形制御系においては、その制御ループ一巡の周波数伝達特性の位相をある周波数範囲で進めるように補償することが、安定度の向上に役立つと結論できよう。

それでは、このような補償をするには、位相進み要素を制御ループに直列にそう入する以外に方法はない

第 9 図 逆ヒステリシスのあるリレー要素

第 10 図 逆ヒステリシスリレー要素の場合の安定限界線

であろうか？ 線形自動制御系の補償方法としては、このような直列補償とさらにフィードバック補償があることを思いおこすと、ただちに線形部にフィードバック補償することにより、線形部全体の特性を、たとえば第8図の破線から(a)あるいは(b)の曲線のような特性に変えることが考えられる。このほかにたとえば第6図の基本形において、リレー要素にフィードバック補償をしたらどうであろうか？ この問題を第11図(a)の制御系について考えてみよう。これは同図(b)のように等価変換されるから、この系の制御ループ中の線形部の伝達関数は

$$G(s) + H(s) = \left(1 + \frac{H(s)}{G(s)}\right) \cdot G(s) \quad (20)$$

である。これから知れることは、第11図(a)のようなフィードバック補償を施したオンオフ形制御系にあっては、第6図の系に、 $1 + H/G$ なる線形補償要素を直列にそう入したのと同様な効果があるということである。

したがって、 $1 + H/G$ が位相進み特性をもっていれば、この補償法は十分使用する価値があるといえよう。いま例として位相進み要素として次の3種類のことを考えてみよう。

$$\left. \begin{array}{ll} \text{(a)} & 1 + Ts, \quad T > 0 \\ \text{(b)} & \frac{1 + (T_1 + T_2)s}{1 + T_2s}, \quad T_1 > 0, T_2 > 0 \\ \text{(c)} & e^{Ls}, \quad L > 0 \end{array} \right\} \quad (21)$$

まず (a) の場合を考えると、あきらかに

$$1 + \frac{H(s)}{G(s)} = 1 + Ts$$

から

$$H(s) = TsG(s) \quad (22)$$

また (b) の場合には

第11図 フィードバック補償をもつ
オンオフ形制御系

$$H(s) = \frac{T_1s}{T_2s+1} \cdot G(s) \quad (23)$$

となる。(22), (23) 式から、補償要素 $H(s)$ の周波数特性のうち位相特性に注目すると

$$\angle H(j\omega) > \angle G(j\omega) \quad (24)$$

という関係が導かれる。つまり、補償要素 $H(s)$ はおくれ要素であっても、そのおくれが、 $G(s)$ のそれより小さければ、十分に役に立つであろうことが知れる。

次に (c) の場合を考えると、

$$H(s) = G(s)(e^{Ls} - 1) \quad (25)$$

もしも

$$G(s) = G_1(s)e^{-Ls} \quad (26)$$

とあらわされるなら

$$H(s) = G_1(s)(1 - e^{-Ls}) \quad (27)$$

となり、これは連続線形で大きなむだ時間を含む制御系の場合に Otto Smith が提案した補償要素⁽⁵⁾と同一の特性をもつ。ところで (25), (27) 式からもわかるとおり、この場合も (24) 式の関係は成立する。

5. フィードバック補償つきオンオフ形 制御装置の特性

フィードバック補償をしたオンオフ形制御装置に関しては、すでに A. Leonhard が 1940 年⁽⁶⁾に $H(s)$ として熱系を用いて良好な制御特性が得られることを発表している。また M. Kovarik はこの熱系として金属棒の熱伝導おくれを用いて、フィードバック補償なしでは $\pm 0.12^\circ\text{C}$ の振幅であった温度制御系を $\pm 0.01^\circ\text{C}$ にまで改良することができたと報告している⁽⁷⁾。

またこの種の制御装置に関しての理論的研究も 1955 年ごろからドイツにおいて相ついで発表されている⁽⁸⁾。

さて、第12図であらわされる簡単な場合について考えよう。ここでリレー要素としては第4図にあらわされるものを取りあげる。

第12図 フィードバック補償された
オンオフ形制御装置

5.1 ステップ応答 いま入力信号 ε として高さ ε_0 のステップ $\varepsilon = \varepsilon_0 u(t)$ がはいったとする*。 $\varepsilon_0 > 0$ として考えると、もしも $\varepsilon_0 > \Delta + h$ であるなら、リレー要素の出力 y は高さ A のステップ状のものとなる。しかしこの出力は直ちに $H(s)$ をとおしてフィードバックされる。そうするとリレー要素への入力 z ははじめ ε_0 であったものが徐々に減少をはじめる。そうしてフィードバック信号 f が ε_0 と $(\Delta - h)$ との差の大きさまで成長したときに、リレー要素の出力 y は再び 0 になる。そうすると今度は f が減少をはじめるその値が ε_0 と $(\Delta + h)$ との差に等しくなるまで減少すると、再びリレー出力は A となる。このような現象のくりかえしがあらわれる。

第13図はこのときの入力信号 ε 、出力信号 y 、フィードバック信号 f の関係をあらわしている。このような持続パルスが出るためには ε_0 が次の条件を満足する場合である：

$$\Delta + h < \varepsilon_0 < A + \Delta - h \quad \dots\dots\dots (28)$$

もしもフィードバック要素 $H(s)$ が第12図のように一次おくれであると、第13図の T_0 , T_1 , T_2 は

$$T_0 = T \ln \left(\frac{A}{A - \varepsilon_0 + \Delta - h} \right) \quad \dots\dots\dots (29)$$

$$T_1 = T \ln \left(\frac{\varepsilon_0 - \Delta + h}{\varepsilon_0 - \Delta - h} \right) \quad \dots\dots\dots (30)$$

$$T_2 = T \ln \left(\frac{A - \varepsilon_0 + \Delta + h}{A - \varepsilon_0 + \Delta - h} \right) \quad \dots\dots\dots (31)$$

T_0 は ε_0 が大きくなるにつれて増大する傾向がある。

第13図 フィードバック補償付きオンオフ形制御装置のステップ応答

* $u(t) = \begin{cases} 1 & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$

ところで T_0 をすぎたあとは出力 y は一定の割合で A と 0 の値とをくりかえしとるから、その平均値を $A\eta$ とすると、

$$A\eta = A \frac{T_2}{T_1 + T_2} \quad \dots\dots\dots (32)$$

したがって (28) 式の示す範囲の ε_0 に対しては

$$A\eta = A \frac{\tanh^{-1} \left(\frac{h}{A - \varepsilon_0 + \Delta} \right)}{\tanh^{-1} \left\{ \frac{A}{\left(\frac{\varepsilon_0 - \Delta}{h} \right) \left(\frac{A - \varepsilon_0 + \Delta}{h} \right) + 1} \right\}} \quad \dots\dots\dots (33)$$

この $A\eta$ を図示すると第14図のようになる。この図には破線でもとのリレー要素の特性が比較のために描いてある。これでわかるように、フィードバック補償をつけることにより大分線形的性質がでてきたことが認められる。

5.2 周波数応答 つぎにこの制御装置の (ε から y までの) 周波数応答に着目しよう。ところでこの出力信号 y はつねにその値が $+A$, 0 , $-A$ の値をとる方形パルスであるから、そのうち入力信号 ε :

$$\varepsilon = \varepsilon_0 \sin \omega t \quad \dots\dots\dots (34)$$

と同一の角周波数成分 y_f をとり出してそれを

$$y \doteq y_f = y_0 \sin(\omega t + \theta) \quad \dots\dots\dots (35)$$

とみなして、 y_0/ε_0 をゲイン、 θ を位相角と考える。いま入力周波数 ω がきわめて低い場合を考えると、そのときの出力 y は (33) 式の ε_0 の代りに (34) 式右辺を代入したものになるから、これから $\theta = 0$ であること、ならびに y_0 を求めることができる。また入力周波数 ω がきわめて高いときには、出力パルスはそれと一致した周波数で $+A$, 0 , $-A$ の値をとる。つまり入力信号の正の半周期に対して出力信号は1個の方形パルス $+A$ を出し、負の半周期に対しては

第14図 フィードバック補償されたリレー要素(第12図)とそのリレー要素静特性の比較

1 個の方形パルス $-A$ を出す。この繰返し周波数はきわめて高いから、第 12 図におけるフィードバック信号 f はほとんど 0 である。したがって、入力信号の ω が高いときには、第 12 図の系で $H(s)=0$ とした場合と同一の特性、つまり第 4 図あるいは (13) 式であらわされることになる。

ω がこれらの中間の値をとるときの周波数特性の決定はだいぶやかかいであるが、入力信号の半周期あたりの出力方形パルスをまず決定し、これから y_0, θ を導き出すことができる⁽⁹⁾⁽¹⁰⁾。

この結果を一例について Bode 線図に描いたものが第 15 図である。この図であきらかなように、ゲイン、位相ともに不連続特性をもっている。この不連続特性は入力正弦波の半周期あたりの出力方形パルスの数の変化するときにおこる。ゲイン、位相をあらわす不連続な曲線にそえてある数字はこの半周期あたりのパルスの数をあらわす。またこの第 15 図の例ではフィードバック要素として一次おくれではなく二次おくれを

第 15 図 フィードバック補償されたオンオフ形制御装置の周波数特性

第 16 図 間欠伝達要素とパルス伝達関数

用いた。これは以上の不連続特性を強調するためである。一次おくれフィードバックの場合には半周期あたりの方形パルスの数が増大するので、この不連続な飛躍もわりと小さいものになってしまう。

さて第 15 図は、ここに考えている制御装置が低周波数領域では PD 的な特性をもっていることを示している。またそのときのゲインは入力振幅 ϵ_0 によって変わり、 ϵ_0 が大きいほどゲインが減少するという制御装置としては好ましい性質をもっている⁽¹⁰⁾。

6. 間欠制御系

第 2 図(c)のような特性をもつ要素も第 3 図に示したように非線形要素と結合してもその影響をうけない。ここではこのような要素を含む制御系のブロック線図は第 5 図(a)のリレー要素の部分はこの要素におきかえたものをその一般形として考える。これは第 5 図(b)のように変形されるから、結局は第 6 図でリレー要素をこの間欠要素でおきかえた制御系がこの種の制御系の基本となる。

いま時間 t を間欠時間 T_r で無次元化して $\bar{t}=t/T_r$ を用いると、 y から x までの伝達関数 $G(s)$ は

$$G(q)=[G(s)]_{s \rightarrow q/T_r} \quad (36)$$

に変わる。 $z(\bar{t})$ と $x(\bar{t})$ とは一般に $\bar{t}$ の連続関数であるが、われわれはこのような信号を間欠時点においてのみ着目し、それらに関連した柱関数 $z[n], x[n]$ をとり出す。つまり

$$\left. \begin{aligned} z[n] &= [z(\bar{t})]_{\bar{t}=n}, \\ x[n] &= [x(\bar{t})]_{\bar{t}=n}, \quad n=0, 1, 2, \dots \end{aligned} \right\} \quad (37)$$

第 16 図に示すように柱関数 $z[n]$ がはいつて柱関数 $x[n]$ が出るような伝達要素を $z(\bar{t})$ から $x(\bar{t})$ までの実際の伝達要素の代りにとりあげる。

ここに不連続ラプラス変換

$$\left. \begin{aligned} Z^*(q) &= \sum_{n=0}^{\infty} z[n]e^{-nq} \\ X^*(q) &= \sum_{n=0}^{\infty} x[n]e^{-nq} \end{aligned} \right\} \quad (38)$$

を定義すると

$$X^*(q) = G_{II}(q) \cdot Z^*(q) \quad (39)$$

$$G_{II}^*(q) = \kappa \sum_{v=1}^l C_{2v} \frac{e^{q\gamma_v}}{e^q - e^{q\gamma_v}} \quad (40)$$

とあらわされる*。ただしここで C_{2v} は

* ここでは $\gamma_k \ll 1$, $\lim_{q \rightarrow \infty} qG(q) = 0$ が仮定されている。
(6-b) 式参照。

$$G(q) = \frac{P(q)}{Q(q)} \quad (41)$$

であって、 $Q(q)=0$ が l 次の多項式で単根 q_v をもつなら、

$$C_{2v} = \frac{P(q_v)}{Q'(q_v)} \quad (42)$$

あるいは (40) 式の代りに k を整数として

$$G_{\Pi}^*(q) = \kappa \sum_{k=-\infty}^{\infty} G(q+2\pi jk) \quad (43)$$

とも示される。

第6図のリレー要素を第16図の S_{Π} でおきかえた間欠制御系の特性方程式は

$$1 + G_{\Pi}^*(q) = 0 \quad (44)$$

と示され、これを満たす q の実数部がすべて負であればこの系は安定である。また $G_{\Pi}^*(q)$ は一巡伝達関数と見られるので、この周波数特性を見ることができれば、連続線形の場合と同様に位相余有あるいはゲイン余有に着目した設計法もとれる。

もしも第16図で入力 $z[n]$ が正弦波状のもので

$$z[n] = e^{jun}$$

であるなら、出力 $x[n]$ は

$$x[n] = G_{\Pi}^*(ju) \cdot e^{jun}$$

とあらわされることが簡単に証明できるので、一巡伝達関数 $G_{\Pi}^*(q)$ の q を ju におきかえたものが直ちに一巡周波数伝達関数となる。ところで (40) あるいは (43) 式から知れるとおり、 $G_{\Pi}^*(q)$ は q の虚数部について $2\pi j$ の周期性をもつので、 ju に対しては $-jp \rightarrow 0 \rightarrow +jp$ の間のみをみてやれば十分である。さらに

$$e^q = \frac{1+p}{1-p} \quad (45)$$

とおきかえると q の虚数部 u が $-\pi \rightarrow 0 \rightarrow +\pi$ の範囲は p の虚数部 v が $-\infty \rightarrow 0 \rightarrow +\infty$ に対応し、かつ

$$\tilde{G}_{\Pi}(p) = [G_{\Pi}^*(q)]_{e^q=(1+p)/(1-p)}$$

により得られる $\tilde{G}_{\Pi}(p)$ は p について有理式になる。したがって、これから $\tilde{G}_{\Pi}(ju)$ の Bode 線図はきわめて容易に描くことができる。

また (44) 式の右辺が

$$1 + G_{\Pi}^*(q) = a_1 e^{lq}$$

という特別な形をもっていると目標値 $v[n]$ がステップ状に変化したとき $x[n]$ は $n \geq l$ で一定の値となり、そこからは完全に制御偏差を 0 とすることが可能である。このような特性を有限時間整定という。

ここであつかったような間欠制御系については、アメリカで開発された z 変換法を利用することもできる

が、ここでは Цыпкин の著書⁽¹¹⁾⁽¹²⁾にしたがって、その根本的な見方をまとめてみた。

7. おわりに

ここでとりあげた問題は不連続要素の出力信号が、 $+A, 0, -A$ の値のみをとる方形波になるような制御系である。このような制御系に関しては、Flügge-Lotz, Цыпкин の著書がある^{(12)~(14)}。またこの不連続要素がリレー要素であるときに、この出力の切り換えをいかなる条件で行なうかの研究⁽¹⁵⁾、間欠要素とリレー要素の結合した不連続制御系の研究⁽¹⁶⁾など興味ある報告が発表されているが、ここではふれなかった。ただおわりに、三巻が第5図のような系で目標値 v が定常不規則に変化しているとき、制御偏差信号が 0 を過ぎるひん度をもって制御成績の測度としようとする試みを発表している⁽¹⁷⁾ことをつけくわえてこの稿をおわりたい。

文 献

- (1) R.J. Kochenburger, *Trans. AIEE*, **72**, Part II (1953), 180; 自動制御便覧, (昭 32), 191, コロナ社; 自動制御機器便覧, (昭 37), I-54, オーム社; 記述関数の数表は伊沢・久村, 自動制御計算演習, (昭 37), 40, オーム文庫. を参照.
- (2) W.K. Linville, *Trans. AIEE*, **70**, (1951), 1779; 自動制御便覧, (昭 32), 178, コロナ社.
- (3) R. Oldenbourg, *Frequency Response*, (1956), 239, Macmillan.
- (4) 片岡, 電気四学会連合大会論文集, (昭 37); 山下, 計測自動制御学会自動制御部会資料, 8-1 (昭 37).
- (5) O.J.M. Smith, *ISA J.*, **6**-2 (1959-2), 28.
- (6) A. Leonhard, *Elektrowärme*, **10**-6 (1940-6), 85.
- (7) M. Kovarik, *Australion J. Appl. Sci.*, **9**-3 (1958-3), 225.
- (8) たとえば S. Pauls, *Regelungstechnik*, **3**-3 (1955-12), 296; A. Böhner, *Siemens Zeitschrift*, **34**-10 (1960-10), 564; W. Böttcher, *Regelungstechnik*, **8**-10 (1960-10), 340, **10**-3 (1962-3), 114; **10**-5 (1962-5), 210. などがある.
- (9) 山口, 計測自動制御学会第1回学術講演会論文集, (昭 37), 296.
- (10) 前出 (8) Böttcher の第3論文, あるいは伊沢・山口, 計測自動制御学会第1回学術講演会論文集, (昭 37), 286.
- (11) Я.З. Цыпкин, *Элементы Теории Импульсного Регулирования*, (1960).
- (12) Я.З. Цыпкин, *Теория Импульсных Систем*, (1958), Физматгиз.
- (13) I. Flügge-Lotz, *Discontinuous Automatic Control*, (1953), Princeton University Press.
- (14) チブキン (林訳), リレー式自動制御系の理論, (昭 35), 日刊工業新聞社.
- (15) K. Tajima, *Memoirs of the School of the Science and Engineering*, No. 23, (1959), Waseda Univ.; I. Bogner & L.F. Kazda, *Trans. AIEE*, **73**, (1954), 118. など.
- (16) K. Izawa, *Proc. First Congress of IFAC, Moscow* **1**, (1960), 321, Butterworth, London; 久村, 計測と制御, **1**-2 (昭 37-2), 115. など.
- (17) 三巻, 機械学会論文集, **29**-200 号 (昭 38-4) に掲載予定.