破壊力学の骨組

大 路 清 嗣*
Kiyotsugu OHJI

1. はじめに

筆者が編修理事から依頼されたことは、破壊力学全般について、平易に、実際問題にも応用しうるよう、しかも非常に限られたページ数内に記述せよということであった。これは容易なことではない。破壊力学も、材料力学と同じように、解析と強度、および両者を総合した応用（設計）の3分野があり、かなり膨大なひろがり内容をもっているの、とにかく内容をしぼらざるを得ない。

会誌の読者は大部分が専門外の方だから、その方々に破壊力学の内容を確実に理解していただくとするなら、強度や応用の部分はきいても、破壊力学の基礎となる概念とその特徴、それによる破壊力学の構成といった部分を筋を通して説明する必要があると考えた。筆者もそうだが、専門外の読者が今後破壊力学に接しそれを使う機会があるとしたら、大多数は破壊力学を使って材料や部材の強度評価を行い、あるいはそれを利用して物を設計するという応用面であろう。そのような方々が今必要とすることは、理論を詳細に追って行くことではなく、その思想をつかむことである。筋を通すために多少数式を使うが、これは斜めに読んでいただければよい。

さてこのような立場から破壊力学とは何かと考えると、それは破壊に最も密接な関連をもつき裂先端近傍の力学情報、すなわちき裂先端近傍の応力・ひずみの状態を、ただ1個の力学パラメータを用い、合理的かつ簡便に、定量的に表現することのできる「き裂の力学」ということになる。これを可能にするのが、き裂先端近傍で支配的な、固有の形をもつ特異応力場という概念である。したがって特異応力場という概念とその応用上の

制約に対する理解が得られれば本文の目的は十分達成される。エネルギー論的手法など重要な分野がほかにないわけではないが、今回は割愛した。

順序が逆になったが、ここで「なぜき裂の力学が必要なのか」という問に答えておく必要があるだろう。非破壊検査技術の発達により機器にはき裂状の初期欠陥が、程度の差こそあれ、必ず存在すると考えるほうが自然であるという状況があり、このような初期き裂や作動中に発生するき裂に対する適切な保守・点検計画や対策の立案、さらにき裂が発生しても容易に最終破壊にいたらない設計など、単に初期設計においてのみならず、き裂の挙動を考慮した全寿命域にわたる安全性確保の強い要求がある。その典型が航空機産業や原子力産業にみられる。一方き裂の存在を考えない、応力を基準とした従来の材料力学的手法は、き裂先端に現れる「無限大」の応力集中のため、このような要求に対処し得ないという現実があった。「無限大」の困難を除いた新手法の出現が必要だったのである。

特異応力場の概念はこの問題に対する解決策を与えたばかりでなく、それに基づいて記述されたき裂強度の信頼性と普遍性を著しく向上させ、機器の全寿命にわたる安全性の向上に大きく寄与した。

以下線形破壊力学、その適用限界を決める小規模降伏の概念とその測度、さらに弾塑性破壊力学を特異応力場の概念に基づいて構成・記述する。

2. き裂先端近傍の線形弾性特異応力場（線形破壊力学）

き裂面は変位の不連続面と考えることができるので、図1に示すような座標系 (x, y, z) に関する変位成分 (u, v, w) に対応して、図中に示すよ

* 正員、大阪大学工学部 (〒565 吹田市大字山田上)。

うな3個の独立な形，すなわちモードⅠ，モードⅡ，モードⅢに分類することができる．き裂面に関しモードⅠは対称形，モードⅡは逆対称形，またモードⅢは面外せん断形の変形となっている．

いまこのようなき裂をもつ線形弾性体の応力を，き裂先端近傍に注目して，平面問題（モードⅠおよびⅡ）あるいは面外せん断問題（モードⅢ）として解いてみる．種々な解法が考えられるが，き裂先端近傍で支配的な特異応力場の説明には複素応力関数を用いるのが便利である．紙数の関係で，解析の過程を逐一述べる余裕はないので，興味のある方は，たとえば石田⁽²⁾の本に詳しく書かれているので，それを参照されたい．簡単のため，少なくともき裂先端近くでは，き裂側面間の開き角は0で，その面には外力が作用していないと仮定する．図1に示したように，き裂先端に座標の原点をおき，この二条件のみから応力のとるべき関数形を求めると，一般につきのようになる（注1）．

$$\sigma_{ij} = C_1 r^{-(1/2)} f_{ij1}(\theta) + C_2 + C_3 r^{1/2} f_{ij3}(\theta) + \dots \quad i, j = x, y, z \quad (1)$$

ここで $C_1, C_2, C_3, \dots$ は変形の基本形，荷重，き裂および物体の形状寸法によって定まる係数で，座標 r および θ には無関係である． $f_{ij1}(\theta)$,

$f_{ij3}(\theta), \dots$ は θ のみの関数で，各応力成分および変形の基本形によって定まる，応力の θ 方向の分布を与える固有関数である． r に関しては $r^{-(1/2)}$ を最低次とし，べき数が $1/2$ ずつ増加する無限級数になっている．

いま破壊が起ころうとしているき裂先端のごく近傍の応力に着目する．式(1)において， r を0に近づけてゆくと，右辺第1項は増加して無限大となるが，第2項は一定値，第3項以下は減少して0に近づくので，き裂先端近傍では第1項が支配的となり，応力は次式で近似される．

$$\sigma_{ij} = C_1 r^{-(1/2)} f_{ij1}(\theta) + O(r^0) \quad (2)$$

式(2)より，き裂先端近傍の応力は，上記以外の境界条件や物体の形状には無関係に，その分布形が変形の基本形および応力成分ごとに定まっており，したがって応力値そのものは境界条件と物体の形状寸法によって定まる係数 C_1 がわかればすべて自動的に定まることになる．換言すれば，き裂先端近傍の応力は，たとえば電荷のまわりの電場のように，一つの固有の場をもった応力で表される．一般にき裂先端で応力が無限大となる応力場を特異応力場と呼んでいる．

三つの基本形に対する弾性特異応力場の応力および変位の成分を具体的に書くとつぎのようになる．

(1) モードⅠ

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos(\theta/2) \begin{Bmatrix} 1 - \sin(\theta/2) \sin(3\theta/2) \\ 1 + \sin(\theta/2) \sin(3\theta/2) \\ \sin(\theta/2) \cos(3\theta/2) \end{Bmatrix} \quad (3)$$

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \frac{K_I}{4G} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \begin{Bmatrix} (2\kappa - 1) \cos(\theta/2) - \cos(3\theta/2) \\ (2\kappa + 1) \sin(\theta/2) - \sin(3\theta/2) \end{Bmatrix} \quad (4)$$

(2) モードⅡ

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \begin{Bmatrix} -\sin(\theta/2) [2 + \cos(\theta/2) \cos(3\theta/2)] \\ \sin(\theta/2) \cos(\theta/2) \cos(3\theta/2) \\ \cos(\theta/2) [1 - \sin(\theta/2) \sin(3\theta/2)] \end{Bmatrix} \quad (5)$$

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \frac{K_{II}}{4G} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \begin{Bmatrix} (2\kappa + 3) \sin(\theta/2) + \sin(3\theta/2) \\ -(2\kappa - 3) \cos(\theta/2) - \cos(3\theta/2) \end{Bmatrix} \quad (6)$$

(3) モードⅢ

$$\begin{Bmatrix} \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix} = \frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} \begin{Bmatrix} -\sin(\theta/2) \\ \cos(\theta/2) \end{Bmatrix} \quad (7)$$

$$w = (2K_{III}/G) \sqrt{r/2\pi} \sin(\theta/2) \quad (8)$$

（注1） 同じ添字が重なった場合は垂直応力，異なる添字の場合はせん断応力を意味する．たとえば σ_{xx} は σ_x ， σ_{xy} は τ_{xy} と読みかえればよい．

モード I およびモード II の場合には、上記以外の成分として、平面ひずみ条件^(注2)下では板厚方向の応力成分 σ_z が、また平面応力条件^(注2)下では板厚方向の変位成分 w が現れ、それぞれ

$$\sigma_z = \nu(\sigma_x + \sigma_y) : \text{平面ひずみ} \quad \dots\dots\dots (9)$$

$$w = -(\nu/E) \int (\sigma_x + \sigma_y) dz : \text{平面応力} \quad \dots\dots\dots (10)$$

となる。式(3)から式(8)において、 K_I 、 K_{II} および K_{III} はモード I、II および III に対する応力拡大係数 (stress intensity factor) と呼ばれ、いずれも上記 C_i に相当する特異応力場の強度 (intensity) を表す係数であって、応力と長さの $1/2$ 乗の積の元をもつ。 E 、 G および ν は縦弾性係数、横弾性係数およびポアソン比である。また κ は ν によってつぎのように表される。

$$\left. \begin{aligned} \kappa &= 3 - 4\nu && : \text{平面ひずみ} \\ \kappa &= (3 - \nu)/(1 + \nu) && : \text{平面応力} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (11)$$

以上のことからわかるように、与えられた物体の形状寸法と境界条件に対し応力拡大係数が計算できれば、き裂先端近傍のある領域内の応力、したがってひずみ、ひずみエネルギー、変形などすべての力学量が定量化できることになる。換言すれば応力拡大係数はき裂先端近傍のあらゆる力学情報を完全に代表している。したがって応力の代わりにこの応力拡大係数をき裂先端近傍の力学状態を代表する量として採用すれば、「無限大」の困難は解消され、同時に得られる情報の質も応力の場合の「点」から、破壊がまさに起ころうとしているき裂先端まわりのある「領域」に拡大され、破壊点まわりの力学環境が完全に同定されて、材料の破壊強度評価の精度が格段に向上することが期待される。

応力拡大係数を求めることは、応力集中係数を計算するのと同様、弾性学の問題である。すでに多数の問題が解かれており、資料集^{(2)(7)~(9)}も刊行されている。また工学的に必要な程度の精度で数値的に解く方法も確立されつつある。ここでは長さ $2a$ のき裂をもつ無限板が、き裂に垂直な方向に、無限遠方で一様な応力 σ をうけるときの応力拡大係数は、 $K_I = \sigma\sqrt{\pi a}$ 、($K_{II} = K_{III} = 0$) で表され、この形が応力拡大係数に対する負荷と形状因子の影響を表す基本となっていることを述べるにとどめる。

一般にき裂先端近傍で支配的な応力あるいはひずみの特異場に着目し、その特異場の強度を直接または間接的に代表することができるパラメータを用いて、破壊条件を記述しようとするアプローチを総称して破壊力学と呼んでいる。とくに上記の線形弾性体の特異応力場に基づく場合を線形破壊力学と称し、今日実用されている破壊力学的手法の主流をなしている。

3. 小規模降伏とき裂先端の塑性域

前章で述べたことからわかるように、き裂先端近傍の応力は特異性のためきわめて大きい値となり、実材料では必ず塑性域が生ずる。この塑性域の寸法が部材の代表寸法 (き裂長さ、き裂先端から隣接き裂または自由表面までの距離など) に比べ十分小さければ、これから後に述べるように、き裂先端近傍の力学状態は、塑性域の内外を問わず、そのき裂の応力拡大係数で表すことができ、依然として線形破壊力学的手法が適用できることになる。このような状態を小規模降伏 (small scale yielding) と呼び、線形破壊力学的手法の有効範囲を決める重要な概念である。本章では、このような小規模降伏状態におけるき裂先端近傍の応力、ひずみ、塑性域寸法、き裂開口変位などについて、全ひずみ塑性の仮定^(注3)のもと、述べる。

3. 小規模降伏とき裂先端の塑性域

問題の内容を定性的に理解してもらえば十分と考えられるので、破壊モードとしてモード I に比

図 1 き裂変形の 3 基本形

(注2) 平面ひずみはひずみが二次元的、平面応力は応力が二次元的な状態を意味するが、工学的には前者が十分厚い板、後者が十分薄い板の状態を代表していると理解すればよい。

(注3) 塑性理論には、ひずみの最終状態は応力の最終状態できまるとする全ひずみ理論と、各瞬間の塑性ひずみ増分は方向がその瞬間の応力状態で、また増分量が応力の増分でできまるとする増分理論とがある。実際の物理現象は増分理論に近いが、解析が容易なため、一方向負荷の場合のように除荷や主応力軸の回転が小さいと想定されるような場合には、全ひずみ理論が用いられることがある。物体内のすべての点で応力が比例的に変化する場合には両理論は一致する。全ひずみ理論は取扱いは弾性理論 (主として非線形) と等価である。

べ実用上のひん度は少ないが、解析解のあるモードⅢを例にとって説明する。

完全弾塑性体^(注4)に対する塑性解が Rice⁽⁶⁾⁽¹⁰⁾によって得られている。小規模降伏条件下では、図2に示すように、塑性域はき裂先端に接する円となる。塑性域の形と寸法は次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} R(\theta) &= R_0 \cos \theta \\ R_0 &= K_{II}^2 / \pi \tau_0^2 \\ K_{II} &= \tau_\infty [2b \tan(\pi a / 2b)]^{1/2} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (12)$$

τ_0 はせん断降伏応力、 τ_∞ は無限遠方で一様に負荷されているせん断応力である。 a および b は図2に示すように、それぞれき裂長さおよび部材幅である。また完全弾性体の特異応力は、複素表示で、

$$\tau_{yz} - i\tau_{xz} = K_{II} [2\pi(x - iy)]^{-(1/2)} \dots\dots\dots (13)$$

と表されるのに対し、完全弾塑性体の小規模降伏下の塑性域外の弾性特異応力は

$$\tau_{yz} - i\tau_{xz} = K_{II} [2\pi(x - K_{II}^2 / 2\pi \tau_0^2 - iy)]^{-(1/2)} \dots\dots\dots (14)$$

となり、き裂がちょうど塑性域寸法の1/2だけ進展したと仮定した場合の弾性特異応力分布と等しくなっている。この事実は塑性域の影響を修正するのにしばしば利用され、き裂長さを塑性域直径の1/2だけ大きくとって有効き裂長さとし、この有効き裂長さに対する弾性特異応力場を強度評価に利用する。モードⅢ以外の場合にも類推的にこの修正法が使われている。

塑性域内のひずみ分布、変位分布およびき裂先端開口変位 (CTOD) δ_i はつぎのようになる。

$$\left. \begin{aligned} r_{\theta z} &= (K_{II}^2 / \pi G \tau_0) (\cos \theta / r), \quad r_{rz} = 0 \\ w &= (K_{II}^2 / \pi G \tau_0) \sin \theta \\ \delta_i &= 2K_{II}^2 / \pi G \tau_0 = 2r_0 R_0, \quad r_0 = \tau_0 / G \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (15)$$

式(12)、(14)および式(15)からわかるように、小規模降伏下では、塑性域の内外を問わず、き裂先端近傍の力学情報はすべて、依然として弾性の応力拡大係数で代表され、したがって線形破壊力学的手法の適用可能な領域になっていることがわかる。

加工硬化材についても Rice の解⁽⁶⁾⁽¹¹⁾がある。応力-ひずみ関係として

$$\left. \begin{aligned} r \leq r_0 \text{ のとき } \tau &= \tau_0 (r / r_0) \\ r > r_0 \text{ のとき } \tau &= \tau_0 (r / r_0)^N, \quad 0 \leq N \leq 1 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (16)$$

を用いると、小規模降伏の場合、塑性域の形状が円であることおよびその寸法は完全弾性体の場合と変わらないが、降伏円の中心位置が硬化指数 N によって移動する。塑性域内の等ひずみ曲線も円となり、その半径 $A(r)$ および中心位置 $X(r)$ は次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} A(r) &= (K_{II}^2 / 2\pi \tau_0^2) (r_0 / r)^{1+N} \\ X(r) &= (1-N)A(r) / (1+N) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (17)$$

式(17)より、き裂前方 x 軸上 ($\theta=0$) r の距離の塑性域内のひずみ分布は

$$\tau_{yz}(r, 0) = r_0 [K_{II}^2 / (1+N) \pi \tau_0^2 r]^{1/(1+N)} \dots\dots\dots (18)$$

で与えられることがわかる。式(18)と式(16)を組み合わせ、塑性域内の応力の特異性が $r^{-N/(1+N)}$ 、ひずみの特異性が $r^{-1/(N+1)}$ となることは注目に値する。塑性域外の弾性特異応力分布が

$$\tau_{yz} - i\tau_{xz} = K_{II} [2\pi\{x - X(r_0) - iy\}]^{-(1/2)} \dots\dots\dots (19)$$

となることは完全弾塑性体の場合と同様である。また塑性域内外のき裂先端近傍の力学情報が依然として弾性の応力拡大係数で規定されることも同じである^(注5)。

実際の破壊形態に多いモードⅠ変形下の塑性域形状は、たとえ小規模降伏下でも、モードⅢの場合のような単純な形(円)にはならず、簡単なモデル的表示はできない。しかしこの場合も、式(16)と同様に、降伏後の加工硬化曲線が N 乗則、すなわち

$$\sigma = \sigma_0 (\varepsilon / \varepsilon_0)^N, \quad \sigma_0, \varepsilon_0 : \text{材料定数} \dots\dots\dots (20)$$

で表される場合、塑性域内の応力とひずみは、式

図2 き裂先端の塑性域 (モードⅢ, 小規模降伏)

(注4) 降伏後全く加工硬化せず、一定の応力(降伏応力)で塑性変形を続けることができる材料をいう。

(注5) 硬化材の解析結果は完全弾塑性体 ($N=0$) および塑性体 ($N=1, \tau_0=\infty$) に連結している。

(18)と同様に N に応じて変化する特異性を持ち、次式で表されることが明らかにされている (12) (13).

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{ij} &= K_\sigma r^{-N/(N+1)} \bar{\sigma}_{ij}(\theta) \\ \varepsilon_{ij} &= K_\varepsilon r^{-1/(N+1)} \bar{\varepsilon}_{ij}(\theta) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (21)$$

$\bar{\sigma}_{ij}(\theta)$ および $\bar{\varepsilon}_{ij}(\theta)$ は式 (2) の $f_{ij1}(\theta)$ に相当する。 σ_{ij} および ε_{ij} の θ に関する分布を与える固有関数、また K_σ および K_ε は塑性の特異応力場および特異ひずみ場の強度を表す、塑性応力拡大係数および塑性ひずみ拡大係数で、 $K_\sigma = \sigma_0 (K_1 / \varepsilon_0)^N$ なる関係がある。小規模降伏下では K_σ および K_ε は、次章でも示すように、弾性の応力拡大係数 K_I で表すことができることはこの場合も変わらない。小規模降伏下の塑性域外の弾性特異応力場の強度が K_I で与えられることは自明である。

式 (12) および式 (15) から、小規模降伏下では、モードIII変形下の塑性域寸法は $(K_{III}/\tau_0)^2$ 、完全弾塑性体のき裂先端開口変位は $(K_{III}^2/G\tau_0)$ を測度として与えられる。モードIについても次元解析や Dugdale モデル(注6)による解析などにより、同様にそれぞれ $(K_I/\sigma_0)^2$ および $(K_I^2/E\sigma_0)$ が測度になることを導くことができる。これは線形破壊力学で広く実用されている重要な知見である。

線形破壊力学は今や各方面で使用され、応用の範囲を広げつつある。しかしながら、一般に破壊力学的手法が成功し、普遍性のある、良好な実績を残しているのは、採用された破壊力学特性量がそのときのき裂先端の力学状態を十分に精度で代表している場合で、その場合に限られる。破壊力学特性量がき裂先端近傍の力学状態を十分に代表し得ない場合には、たとえ狭い範囲の負荷や幾何

学的条件に対し良好な結果を与えるようにみえても、負荷や部材の形状・寸法が大幅に変化すれば普遍性のある結果は得られないということを銘記すべきである。線形破壊力学が一般性をもって適用できる可能性のあるのは小規模降伏の条件が満たされる場合までであることをとくに強調しておきたい。小規模降伏の限界は上記塑性域の測度を用いて実験的に決定されるべきものである。

4. 弾塑性破壊力学と J 積分

破壊が小規模降伏の範囲をこえて、発達した弾塑性状態で起こる場合には、もはや線形特異応力場はき裂先端近傍の力学状態を代表することはできず、したがってそれに基礎をおく線形破壊力学の適用は無効となる。このような場合のき裂先端近傍の応力とひずみは、式 (21) で与えられる特異応力および特異ひずみで近似できることが示されている (12) (13)。この特異応力場または特異ひずみ場に注目して構成された破壊力学を弾塑性破壊力学と呼び、線形破壊力学の場合と類似に、 K_σ または K_ε を用いて一つの体系を構成することができる。また塑性域中、き裂先端近傍に、さらに乱れた、たとえば破壊進行域 (end region) と呼ばれるような領域が存在しても、その領域の寸法が物体の代表寸法や塑性域の代表寸法に比べ十分小さければ、線形破壊力学における小規模降伏と類似の概念により、破壊進行域を含めき裂先端近傍の力学状態は塑性特異応力場の強度を表す K_σ (または K_ε) で代表させることができるはずである。

ただ実際には K_σ を用いる代わりに、 K_σ と一対一の対応関係にあり、破壊力学上多くの利点をもつ J 積分を用いてき裂先端近傍の力学状態を代表させるのが普通である。そこで本章では J 積分の性質とそれのもつ破壊力学上の意義を説明する。

まず J 積分の定義について述べよう。均質な線形または非線形弾性体の二次元問題において、Rice⁽¹⁴⁾ は J 積分と呼ばれる線積分を提案した。図3に示すように、側面が平行なき裂をとり、 x 軸を側面に平行にとる。き裂面には表面力は作用せず、物体には体積力は作用しないものとする。微小ひずみ理論を採用する。いまき裂の一方の側面から出発し、反時計まわりに他方の側面を終点

図3 J 積分の定義

(注6) 弾性き裂問題の重ね合わせを用いたき裂の弾塑性問題の一近似解法で、塑性域寸法や CTOD の計算に実用されている。詳しくは本文末尾に示した参考書 (1)~(6) を参照されたい。

とする任意の曲線 Γ に沿うつぎのような線積分を定義する(注7)。

$$J = \int_{\Gamma} [W dy - T_i (\partial u_i / \partial x) ds] \\ = \int_{\Gamma} \left[\left\{ W - \left(\sigma_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + \tau_{xy} \frac{\partial u_y}{\partial x} + \tau_{xz} \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) \right\} dy + \left\{ \tau_{xy} \frac{\partial u_x}{\partial x} + \sigma_y \frac{\partial u_y}{\partial x} + \tau_{yz} \frac{\partial u_z}{\partial x} \right\} dx \right] \quad (22)$$

ただし W はひずみエネルギー密度で、

$$W = \int_0^{\varepsilon_{ij}} \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij} \\ = \int_{(0,0,\dots,0)}^{(\varepsilon_x, \varepsilon_y, \dots, \varepsilon_{zz})} (\sigma_x d\varepsilon_x + \sigma_y d\varepsilon_y + \sigma_z d\varepsilon_z + \tau_{xy} d\gamma_{xy} + \tau_{yz} d\gamma_{yz} + \tau_{zx} d\gamma_{zx}) \quad (23)$$

T_i は Γ 上の表面力で、 Γ に沿う外向き法線ベクトルの成分を n_j とすれば、 $T_i = \sigma_{ij} n_j$ で定義される。 u_i は変位、 ds は Γ 上の線素である。この線積分のことを J 積分と呼んでいる。

紙数の関係でここでは証明はしないが、 J 積分は破壊力学上重要な意味をもつ、つぎの二つの性質をもっている。

- (1) J 積分の値は積分経路に依存しない。
- (2) J 積分はき裂長さの変化に伴う系のポテンシャルエネルギーの解放率に等しい。

まず積分経路独立性を用い、 J 積分値がき裂先端近傍の力学状態の代表値になっていることを示そう。

まず小規模降伏の場合も含め、線形弾性き裂に対し J 積分を評価する。経路独立性を利用して、線形弾性特異応力場が支配的な領域内に積分経路を選べば、モード I き裂について

$$J = (1 - \nu^2) K_I^2 / E : \text{平面ひずみ} \\ J = K_I^2 / E : \text{平面応力} \quad (24)$$

またモード I, II および III の混合形き裂の場合には

$$J = (\kappa + 1)(K_I^2 + K_{II}^2) / 8G + K_{III}^2 / 2G \quad (25)$$

となる。このように K と J に対応関係があるということは、 J もまた線形弾性き裂（小規模降伏の場合も含む）の先端近傍の力学状態の代表値であることを意味している。

つぎに弾塑性状態の J 積分を評価してみよう(注8)。積分経路を式(21)の塑性特異応力場が支配的な領域内に選び計算すると、

$$J = A_N K_s K_o = A_N (\sigma_0 / \varepsilon_0^N) K_s^{(N+1)} \\ = A_N (\varepsilon_0 / \sigma_0^{1/N}) K_o^{(N+1)/N} \quad (26)$$

ただし A_N は硬化指数 N に関する係数である。式(21)と式(26)から、弾塑性き裂の場合も J 積分値がき裂先端近傍で支配的な特異応力場の強度を代表していることがわかる。

経路独立性がもつ応用上の重要な意義について述べておく。破壊力学で今日工業的に利用されているのは主として線形破壊力学であるが、これが適用するためには小規模降伏条件が満たされなければならない。小規模降伏は有限寸法の試験片に対しては無限小の（実際には十分小さい）塑性域、あるいは有限の塑性域寸法に対しては無限大の（実際には十分大きい）試験片の場合に成立する。したがってき裂先端に大きな塑性域を生ずる高じん性材の線形破壊力学的破壊特性（たとえば破壊じん性）を求めようとする場合には大形の試験片を必要とする。いまこのような大形試験片の J を二つの積分経路について評価する。一つは塑性域外で弾性特異応力場の支配的な領域内での経路、他は塑性域内の塑性特異応力場が支配的な領域内での経路を選ぶものとすれば、両方の値は、同一試験片の異なる経路に対するものであるから、経路独立性より、相等しく、それぞれ式(24)および式(26)で表される。破壊の発生がき裂先端近傍の力学状態のある限界で決まるものとするれば、それは J がある一定値に達したとき破壊すると考えるのと同様である。き裂先端に塑性域が生ずる場合のき裂先端近傍の特異応力場は、試験片の大小や小規模降伏の成立に関係なく、式(21)で与えられる。換言すれば小形試験片で J によって評価した破壊限界特性は、そのまま大形試験片の限界特性であり、経路独立性を利用すると、式

(注7) 添字 i, j については、同一項内で同じ添字が重なれば、それについては総和をとるという、総和規約を用いる。式(22)および式(23)には具体的な演算結果が示されている。

(注8) J 積分は本来弾性体に対し定義されており、一般的には弾塑性体に対し適用することはできない。しかし、(注3)にも述べたように一方向負荷で、しかもき裂成長がなく局部的にも除荷が起こらない場合には、実際の物理現象はかなりよく全ひずみ理論で近似できる。このような場合には、「形式的に」、全ひずみ塑性体（形式的取扱いは弾性体と等価）に対し J 積分の概念が適用可能である。

(24) から直ちに線形破壊力学の破壊特性値を求めることができることになる。すなわち線形破壊力学では大形試験片を用いないと求まらなかった特性が、弾塑性破壊力学に基づく J を用いると小形試験片で求まることになり、工業的な意義は大きい。

なお一般的に数式化するのは困難だが、き裂先端開口変位 (CTOD) も、少なくとも物理的な直観的判断として、き裂先端近傍の力学量、とくに変形の代表値になっていることが想定され、弾塑性破壊力学の特性量の一つとして利用可能である。 J と同様に、CTOD を媒介とした試験片小形化の論理が展開できる。

最後に式 (24) と式 (26) を等置して K_0 または K_1 について解けば、これらの量が弾性の応力拡大係数で表され、小規模降伏下の塑性域内の力学状態も弾性の応力拡大係数で代表させられるという前章の記述を証明したことになる。

J 積分のエネルギー解放率としての性質は弾性体についてはそのまま破壊問題に対するエネルギー論的手法として利用できるが、弾塑性体には適用できない。弾塑性体に対しては、この性質は形式的適用により、 J 値の実験的評価法の基礎式として非常に役立っているが⁽¹⁵⁾、記述は割愛する。

最後に J 積分は非常に有用な性質をもつが、同時に定義からくる制約も大きく、弾塑性体に対しては、少なくとも理論上、一方向負荷のもと、除荷やき裂成長がない場合が適用限界になっていることをつけ加えておきたい。詳しくは文献 (15) を参照されたい。

5. ま と め

き裂先端近傍の力学状態は適当な破壊力学特性量を選べば、1 個のパラメータで完全に代表されることが明らかとなった。点の情報から破壊が起こりつつある点をかこむ領域の情報へと、力学情報の質・量両面の向上の意義も大きい。このようなパラメータを用い負荷の条件を代表させ、材料の破壊条件を記述しようとする破壊力学的手法が工学的に有効であるためには、そのようなパラメ

ータを借りて表現され、材料試験的に決定できるような物理的実体が存在するとともに、採用されたパラメータが解析的に決定できることが必要である。多少の難易の差はあるが、本文中に現れたパラメータはこれらの条件を満足し、実用されている。

破壊力学はぜい性 (不安定) 破壊⁽¹⁶⁾、疲労破壊⁽¹⁷⁾、環境破壊⁽¹⁸⁾、クリープ破壊⁽¹⁵⁾などに適用され、成功をおさめている。詳しくは文献を参照されたい。

(原稿受付 昭和 54 年 6 月 7 日)

文 献

〔一般参考書〕

- (1) 岡村, 線形破壊力学入門, (昭 51), 培風館.
- (2) 石田, き裂の弾性解析と応力拡大係数, (昭 51), 培風館.
- (3) 村上・大南 (編), 破壊力学入門, (昭 54), オーム社.
- (4) Broek, D., *Elementary Engineering Fracture Mechanics*, (1974), Noordhoff.
- (5) Knott, J.F., *Fundamentals of Fracture Mechanics*, (1973), Butterworths.
- (6) Rice, J.R. (Liebowitz, H. 編), *Fracture*, Vol. II, (1968), 191, Academic Press.

〔資料集〕

- (7) Tada, H., ほか 2 名, *Stress of Cracks Handbook*, (1973), Del Research Corp.
- (8) Sih, G.C. (編), *Handbook of Stress Intensity Factors*, (1974), Inst. Frac. and Solid Mech., Lehigh Univ.
- (9) Rooke, D.P. and Cartwright, D.J., *Compendium of Stress Intensity Factors*, (1976), Her Majesty's Stationary Office.

〔引用文献〕

- (10) Rice, J.R., *Int. J. Frac. Mech.*, 2-2 (1966), 426.
- (11) Rice, J.R., *Trans. ASME*, Ser. E, 34-2 (1967-6), 287.
- (12) Hutchinson, J.W., *J. Mech. & Phys. Solids*, 16-1 (1968), 13; 16-5 (1968), 337.
- (13) Rice, J.R. and Rosengren, G.F., *J. Mech. & Phys. Solids*, 16-1 (1968), 1.
- (14) Rice, J.R., *Trans. ASME*, Ser. E, 35-2 (1968-6), 379.
- (15) 大略・ほか 2 名, 機械の研究, 30-10 (昭 53-10)~31-1 (昭 54-1).
- (16) 小林, 材料, 27-297 (昭 53-6), 495; 27-299 (昭 53-8), 711.
- (17) 講座として, 材料, 26-284 (昭 52-5)~26-289 (昭 52-10), 計 6 回.
- (18) 駒井, 機械の研究, 29-1 (昭 52-1)~30-3 (昭 53-3).