境界要素法の基礎

田 中 正 隆*
Masataka TANAKA

Key Words: Boundary Element Method, Fundamental Solution, Integral Equation, Green's Formula, Boundary Element, Boundary Integral Method

1. ま え が き

境界要素法 (Boundary Element Method, 以下では BEM と略記する) という数値解析法が, 最近多数の工学問題の解析に応用され, その有用性が多くの人々を集めている. 本稿では, この BEM 解析法の基本的な考え方を中心に説明し, あわせて研究の現状について概説する.

BEM は, 考えている領域の表面を要素分割するという点において, 有限要素法 (FEM と略記する) と類似しているが, 積分方程式を離散化の対象にしているという点において根本的に異なる解析法である. 差分法 (FDM と略記する) は, 問題の支配微分方程式そのものを階差方程式で近似する解析法であるのに対し, BEM は支配微分方程式を Green の定理によってこれと等価な境界積分方程式に変換したのち, 数値解を求めようとする.

上述のように, BEM は境界積分方程式を解析の対象にするので, 境界表面だけを要素分割するだけでよく, 考えている問題の次元を一つだけ下げで取扱うことができる. このために, 領域全体を分割する必要のある FEM や FDM などのいわゆる領域形解法に比較して, 取扱う代数方程式系の元数が小さくなり, 入力データ数および計算時間を大幅に減少させることができるという特長がある. 近年, FEM や FDM に基づく解析システムが大形化するにつけ, 入力データ作成ための費用を含む計算コストの面から, BEM の有用性が着目されるようになった. 研究開発が活発に進められた結果, BEM は連続体力学のほとんどあら

ゆる分野で, FEM や FDM の強力なライバルに成長しつつある. 特に最近のパーソナルコンピュータの改良と普及によって, ハンディな数値計算を行いたいという技術者の要求がいちだんと強くなり, これに適した解析法である BEM に大きな関心が寄せられている.

BEM は新しい解析法というわけではない. 物理数学の領域では, 境界積分方程式法 (Boundary Integral Equation Method) または境界積分法 (Boundary Integral Method), 特異点解法 (Singularity Method) あるいは Green 関数法 (Green's Function Method) などの名前で古くからよく知られた解析法である. これまでは, 境界上に適当な数の代表点を配置し, これらの点で積分方程式を満足させるという選点法的な解法が用いられてきた. しかし最近になって, FEM の考え方を取り入れ境界上に配置した境界要素を用いて離散化するという新しい解析法がくふうされ, 今日の隆盛をみるにいたった. 研究開発が精力的に進められた結果, 今日では FEM におけると同様の高次要素までを用いて, 計算精度と効率の向上が計られている.

BEM は, 直接法 (Direct Method) と間接法 (Indirect Method) とよばれる二つの方法に分類できる. 直接法では, 物理的意味の明白な変数 (たとえば, 変位, 表面力など) を用いて定式化が行われる. 一方, 間接法は, ポテンシャル論などにおいて古くから用いられてきた, 単一層ポテンシャルや二重層ポテンシャルなどを用いる定式化であり, 取扱う変数の物理的意味は必ずしも明らかではない. 今日では, 技術者になじみやすい定式化である直接法が, 工学問題への多数の応用において主流を占めつつあるといえる. しかしながら, 間接法にも捨て去りがたい味があり, 直接法

* 正員, 大阪大学工学部 (〒565 吹田市山田丘 2-1).

と平行して、いくつかのグループにより活発に研究が続けられている。本稿では、直接法に基づく BEM の基本的な考え方を中心に記述する。

2. BEM 発展の概要

ポテンシャル問題や線形弾性問題についての BEM の理論的基礎は, Kellogg⁽¹⁾, Love⁽²⁾, Bergman-Schiffer⁽³⁾, Muskhelishvili⁽⁴⁾, Mikhlin⁽⁵⁾ および Kupradze⁽⁶⁾ の著書に詳しく論じられている。この解法の工学問題への応用は, FEM とほぼ同じ時期である 1960 年代の始めにすでに試みられている。しかし, FEM が多くの関心を引きつけ, 本格的に始まったコンピュータおよび計算機工学の発達と結びついて FEM の研究開発が先行し, その工学解析における可能性が過度に評価される傾向すらあった。FEM は種々の点において改良がなされてきたが, これらの過程で FEM 解析法の持つ問題点も明らかになってきた。

そのうちで最大の問題点は, 入力データ(要素の節点座標や節点番号など)が膨大であって作成に多大の時間を要することであり, また三次元解析や時間依存性問題の解析に計算コストがかかりすぎるということである。これらの問題点が明らかになるにつれて, 徐々に BEM の再評価が行われるようになり, BEM 解析法に FEM で蓄積された技法をとり入れるくふうなどが施されて, 発達してきた。

境界積分方程式を離散化してコンピュータを用いて解を得る方法が, まず Jaswon⁽⁷⁾ と Symm⁽⁸⁾ によってポテンシャル問題について間接法の立場から始められた。その後, Jaswon, Maiti などにより平板の曲げ問題に対する解法の研究が行われた。これらの研究成果は, Jaswon と Symm の著書⁽⁹⁾にまとめられている。また, Banerjee ら⁽¹⁰⁾⁽¹¹⁾が編集した本にも多数の間接法による研究成果が収められている。

一方, 直接法に基づく BEM の先駆的研究は, まず Jaswon と Ponter⁽¹²⁾により, また Rizzo⁽¹³⁾ および Massonnet⁽²¹⁾によって静弾性問題について行われた。その後, Rizzo, Shippy, Shaw, Cruse, Lachat, Watson, Brebbia, Chaudouet らにより, 精力的に研究が進められ, 有限要素法と同様のアイソパラメトリック境界要素を用いて, BEM 解析法の高精度化および高効率化が計られ

てきた。その結果, 固体力学ばかりでなく, 流体力学や電磁気学などの非構造力学分野においても, 大規模な実際問題が解析できるようになってきている。さらに, 非線形問題の解析にも応用されて有益な知見が多数得られてきており, BEM の適用範囲は拡大の一途をたどっている。最近になって, 重みつき残差法として BEM を評価した教科書⁽¹⁴⁾⁽¹⁵⁾が出版され, 直接法に基づく BEM の研究がいつそう活発になったといえる。また, わが国でも, 直接法に基づく BEM 解析法の基礎と応用を詳述した本⁽¹⁶⁾が出版されるに及んで, BEM の研究開発にいちだんと熱が入ってきたようでもある。さらに, 1983 年 11 月には広島で, 第 5 回境界要素法国際会議が開催されることになっており, この会議を機に, BEM の研究がいちだんと発展するものと思われる。

なお, 本稿は BEM 解析法の概要についてだけ述べるが, 発達小史や解析法の基礎および最近の応用についてさらに知りたい読者諸氏は, 拙著連載講座⁽¹⁷⁾をご参照いただければ幸いである。

3. 解析法の基礎

場の支配微分方程式を境界積分方程式に変換し, これに FEM と同様の離散化を施して, 代数方程式を解く問題に帰着させるというのが BEM の基本である。直接法とよばれる BEM 解析法では, 領域積分と境界積分の関係を表す Green の公式を出発点とし, これに無限媒体についての基本解を用いて定式化が進められる。ここでは, Laplace 方程式で表される問題を例にとりて, BEM 解析法の基本的な考え方について説明しよう。

3.1 Green の公式と基本解 熱伝導や電磁場あるいは波動の問題などは, ϕ をポテンシャルとしたとき, 領域 Ω 内で Laplace 方程式

$$\nabla^2 \phi = 0 \quad \dots\dots\dots (1)$$

を解く問題に帰着することが多い。ここで, 作用素 ∇^2 はラプラシアンとよばれ, 次式で定義される。

$$\nabla^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \quad (\text{三次元問題}) \quad \dots\dots\dots (2)$$

あるいは

$$\nabla^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \quad (\text{二次元問題}) \quad \dots\dots (3)$$

境界条件はつぎのように表すことができる。

$$\left. \begin{aligned} \phi &= \bar{\phi} && \Gamma_{\phi} \text{ 上} \\ q &\equiv \frac{\partial \phi}{\partial n} = \bar{q} && \Gamma_q \equiv \Gamma - \Gamma_{\phi} \text{ 上} \end{aligned} \right\} \cdots \cdots (4)$$

ここで、 n は境界 Γ 上の外向き単位法線である (図1)。また、上付きバーは規定された量であることを示す。

いま、 ϕ と ϕ^* を、境界 Γ までを含めた全領域 $\Omega + \Gamma$ において二階導関数まで連続な関数とする。このとき、式(1)の両辺に ϕ^* を掛けて領域全体にわたって積分した恒等関係式

$$\int_{\Omega} \nabla^2 \phi \phi^* d\Omega = 0 \cdots \cdots (5)$$

に、Gauss の発散定理

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_i \partial x_i} \phi^* d\Omega &= \int_{\Gamma} \frac{\partial \phi}{\partial x_i} n_i \phi^* d\Gamma \\ &\quad - \int_{\Omega} \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \frac{\partial \phi^*}{\partial x_i} d\Omega \end{aligned} \cdots \cdots (6)$$

を適用して式変形をすれば、つぎのような Green の公式を導くことができる。

$$\int_{\Omega} (\phi \nabla^2 \phi^* - \phi^* \nabla^2 \phi) d\Omega = \int_{\Gamma} (\phi q^* - \phi^* q) d\Gamma \cdots \cdots (7)$$

ただし、

$$q^* \equiv \frac{\partial \phi^*}{\partial x_i} n_i = \frac{\partial \phi^*}{\partial n} \cdots \cdots (8)$$

とおいてある。

さて、領域 Ω を占める媒体と同じ性質を持つ無限の広がりを持つ媒体を考え、その中の一点 a に単位の集中ポテンシャルが作用する場合を考える。点 b でのポテンシャルの変化 $\phi^*(a, b)$ は、

図1 使用記号と座標系

次式により支配されることになる。

$$\nabla^2 \phi^*(a, b) + \delta(a, b) = 0 \cdots \cdots (9)$$

ここで、 $\delta(\cdot)$ は Dirac デルタ関数を表し、この関数は、 $a \neq b$ においては0であって

$$\lim_{b \rightarrow a} \int_{\Omega} \delta(a, b) d\Omega(b) = 1 \cdots \cdots (10)$$

を満たすものとして定義される。式(9)の $\phi^*(a, b)$ は、Laplace 方程式の基本解 (Fundamental Solution) とよばれる。三次元媒体についての基本解は

$$\phi^*(a, b) \equiv \phi^*(r) = \frac{1}{4\pi r} \cdots \cdots (11)$$

また、二次元媒体の基本解は

$$\phi^*(a, b) \equiv \phi^*(r) = \frac{1}{2\pi} \ln\left(\frac{1}{r}\right) \cdots \cdots (12)$$

で与えられることがわかっている⁽¹⁵⁾⁻⁽¹⁷⁾。ただし、 r は点 a, b 間の距離を表す。

上述の基本解と支配方程式(1)とを Green の公式(7)に用い、式(10)の Dirac デルタ関数の性質を考慮すれば、つぎの積分方程式が得られる。

$$\begin{aligned} \phi(a) + \int_{\Gamma} [q^*(a, B)\phi(B) \\ - \phi^*(a, B)q(B)] d\Gamma(B) = 0 \end{aligned} \cdots \cdots (13)$$

ただし、図1に示ように、点 a は Ω 内の任意点を、点 B は境界 Γ 上の任意点を表す。

3.2 境界積分方程式 式(13)は、 Ω 内の任意点のポテンシャル値と境界上のポテンシャル ϕ およびその法線導関数(流束とよぶことが多い) q とを関係づける積分方程式である。問題を BEM で解くためには、点 a を境界 Γ 上の任意点 A に移行させた境界積分方程式を求める必要がある。このとき、基本解 ϕ^* およびその流束 q^* は、三次元問題では $1/r$ および $1/r^2$ を、また二次元問題では $\ln(1/r)$ および $1/r$ を含んでおり、 $A=B$ すなわち $r=0$ のときに特異性を持つことに注意しなければならない。三次元問題についてこのことを考察するためには、境界点 A のまわりに微小半径 ϵ の球を付加し、この球上に点 B があるものとして計算を進め、あとで $\epsilon \rightarrow 0$ の極限操作を行えばよい。二次元問題については、半径 ϵ の円弧を境界に付加して同じような操作を行えばよい。

このような操作を行ったのち、式(13)から境界積分方程式が導かれて、つぎのように表すことができる。

$$\begin{aligned} c(A)\phi(A) + \int_{\Gamma} [q^*(A, B)\phi(B) \\ - \phi^*(A, B)q(B)] d\Gamma(B) = 0 \end{aligned} \cdots \cdots (14)$$

ここで、 c は点 A での境界の幾何学的性質によって決まるものであり、境界が滑らかなときは $c=1/2$ となる。 c の値は、滑らかでない場合も含めて、後述のように、等ポテンシャル条件から決めることができる。

3.3 離散化と解法 境界積分方程式 (14) を離散化し、代数方程式に変換して数値解を求めるために、境界 Γ を多数の境界要素に分割する。この要素には、FEM で広く用いられている種々の高次曲線および曲面要素を応用することができる。

BEM 解析法の基本を理解するために、まず最も簡単な一定境界要素を用いる離散化とその解法について述べてみよう。

一定境界要素では、要素内のいたるところで ϕ と q が一定であると仮定し、要素図心に位置する一つの節点における値で代表させる。したがって、境界上の全要素数を E とするとき、これが境界上の全節点数 M に等しくなる。

境界上の i 番めの節点 A_i が点 A に一致し、点 B が j 番めの境界要素内にあるものと考えて、式 (14) を離散化すると次式が得られる。

$$c_i \phi_i + \sum_{j=1}^E q_{ij}^* \phi_j - \sum_{j=1}^E \phi_i^* q_j = 0 \quad \dots\dots\dots (15)$$

ただし、

$$\left. \begin{aligned} q_{ij}^* &= \int_{\Gamma_j} q^*(A_i, B) d\Gamma(B), \\ \phi_i^* &= \int_{\Gamma_j} \phi^*(A_i, B) d\Gamma(B) \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (16)$$

である。上式から明らかなように、係数 q_{ij}^* および ϕ_i^* は、節点 i に及ぼす j 要素の影響を表すものと解釈することができる。そして、基本解がわかっていると、これらの値は計算することができる。式 (15) をすべての節点について書き表すと、つぎのような代数方程式にまとめることができる。

$$[H] \{\phi\} - [G] \{q\} = \{0\} \quad \dots\dots\dots (17)$$

ここで、 $\{ \}$ は例ベクトルを表すものとし、

$$\{\phi\} \equiv \{\phi_1 \phi_2 \dots \phi_E\}, \quad \{q\} \equiv \{q_1 q_2 \dots q_E\} \quad \dots\dots\dots (18)$$

である。また、係数マトリックス $[H]$ と $[G]$ は、式 (16) を成分とするものであって、 $(E \times E)$ の正方マトリックスである。すなわち、

$$[H] = \begin{bmatrix} c_1 + q_{11}^* & q_{12}^* & \dots & q_{1E}^* \\ q_{21}^* & c_2 + q_{22}^* & \dots & q_{2E}^* \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ q_{E1}^* & q_{E2}^* & \dots & c_E + q_{EE}^* \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots (19)$$

および

$$[G] = \begin{bmatrix} \phi_{11}^* & \phi_{12}^* & \dots & \phi_{1E}^* \\ & \phi_{22}^* & \dots & \phi_{2E}^* \\ & (Sym.) & \ddots & \vdots \\ & & & \phi_{EE}^* \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots (20)$$

ただし、 $(Sym.)$ は対称であることを表すものとする。係数マトリックス $[H]$ の対角項に現れる係数 c_i は、一定要素を用いる場合はすべての節点において $c_i=1/2$ となる。しかし、この値を直接用いなくても、式 (17) で一様ポテンシャルのもとでは流速が全境界上で 0 でなければならないという条件：

$$\{\bar{\phi}\} = \{1 \ 1 \ \dots \ 1\}, \quad \{\bar{q}\} = \{0 \ 0 \ \dots \ 0\} \quad \dots\dots\dots (21)$$

を考慮することにより、 $[H]$ の対角項を定めることができ、つぎのようになる。

$$H_{ii} = - \sum_{(j \neq i)}^E H_{ij} \quad \dots\dots\dots (22)$$

式 (17) は、 $2E$ 個の境界節点量について E 個の方程式を与える。境界条件により、 Γ_ϕ 上の ϕ と Γ_q 上の q の値、すなわち E 個の節点量が規定されるので、式 (17) を E 個の未知節点量について解くことができる。

境界上の ϕ と q が上述のようにして求められると、 Ω 内のポテンシャル値は、式 (13) を離散化した関係式により計算できることになる。

つぎに、高次境界要素を用いる場合の離散化について簡単に考察してみよう。この場合は、要素の節点値を用いて、要素内の任意点における ϕ と q の値が、つぎのように補間できるものと考えればよい。

すなわち、

$$\phi = [N] \{\phi\}^e, \quad q = [N] \{q\}^e \quad \dots\dots\dots (23)$$

ここで、 $[N]$ は形状関数 (Shape Function) マトリックスである。また、 $\{\phi\}^e$ と $\{q\}^e$ は、 e 番目の境界要素における ϕ と q の節点値を成分とする列マトリックスである。高次要素を用いる場合には、ある要素の節点が他の要素の節点でもあることに注意すればよい。

これ以外については、一定要素の場合と同様の離散化ができて、最終的に式 (17) の形の代数方程式にまとめることができる。これを境界条件を考慮して、未知節点量について解けば問題が解決する。

4. あとがきに代えて——BEM 研究の今後

BEM はまず線形問題について研究が進められ、つづいて時間依存性および非線形問題へと応用範囲の拡大が計られてきた。本稿を結ぶにあたり、まだ未開拓な分野への BEM の応用について、今後の研究へのささやかな展望を試みてみることにしよう。

BEM は領域形解法と異なり、無限領域を容易に取扱うことができる。したがって、ある問題については FEM と BEM を結合して、両者の長所を生かした解析法を用いると有利なことがある。流体の波動や電磁場の問題にこの結合解法が用いられて成功している⁽¹⁸⁾。また、線形弾性問題についても研究されている⁽¹⁹⁾。この種の結合解法が、非線形問題や異方性、あるいは非均質性の問題に広く用いられるようになるものと考えられる。

大変形を含む幾何学的非線形性の問題について、効果的な BEM 解析法はまだ確立されていない。この領域は、BEM 応用の大きな未開拓分野の一つであるといえよう。板やかくななどの曲げ問題では大変形を考慮する必要性が高く、このような問題に対する研究がすでに開始されてるとはいえ⁽²⁰⁾、今後の研究の発展がおおいに望まれている。

地盤あるいは流体と構造物との関連変形問題についても、まだ未解決の問題が多数残されている。さらに、変位場と温度場、温度場と磁場、磁場と変位場などの連成問題が考えられるが、この種の連成問題についての効果的な BEM 解析システムの確立が待たれる。

BEM は、無限媒体に対する基本解を解法の基礎とする。このために、多数の問題に対する基本解を、BEM 解析に応用しやすい形で求める研究もきわめて重要である。

本稿では、最近著しく脚光を浴びている BEM の基礎を、Laplace 方程式を例にとりて説明した。あわせて、BEM の研究の今後について概観した。紙面の都合により、非線形問題および時間依存性問題への、最近の興味深い BEM の応用については割愛せざるを得なかった。これらは、また別の機会に報告させていただくことにしたい。

終わりに、本解説の執筆を強力にお勧めいた

いた名古屋大学名誉教授（現摂南大学工学部長教授）成岡昌夫先生のつねに変わらぬご支援に対し、深く感謝する。また、大阪大学工学部赤木新介教授のご配慮に対し、厚くお礼申し上げる。

（原稿受付 昭和 57 年 8 月 30 日）

文 献

- (1) Kellogg, O.C., *Foundation of Potential Theory*, (1929), Springer.
- (2) Love, A.E.H., *A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity*, 4th ed., (1924), Cambridge Univ. Press.
- (3) Bergman, S. and Schiffer, M., *Kernel Functions and Elliptic Differential Equations in Mathematical Physics*, (1953), Academic Press.
- (4) Muskhelishvili, N.I., *Singular Integral Equations*, (1953), P. Noordhoff.
- (5) Mikhlin, S.G., *Multidimensional Singular Integrals and Integral Equations*, (1965), Pergamon Press.
- (6) Kupradze, V.D., *Potential Methods in the Theory of Elasticity*, (1965), I.P.S.T.
- (7) Jaswon, M.A., *Proc. R. Soc., Ser. A*, **275** (1963), 23.
- (8) Symm, G.T., *Proc. R. Soc., Ser. A*, **275** (1963), 33.
- (9) Jaswon, M.A. and Symm, G.T., *Integral Equation Methods in Potential and Elastostatics*, (1977), Academic Press.
- (10) Banerjee, P.K. and Butterfield, R. (eds.), *Developments in Boundary Element Methods—1*, (1979), Applied Science Publishers.
- (11) Banerjee, P.K. and Shaw, R.P. (eds.), *Developments in Boundary Element Methods—2*, (1982), Applied Science Publishers.
- (12) Jaswon, M.A. and Ponter, A.R., *Proc. R. Soc., Ser. A*, **273** (1963), 237.
- (13) Rizzo, F.J., *Q. Appl. Math.*, **25** (1967), 83.
- (14) Brebbia, C.A., *The Boundary Element Method for Engineers*, (1978), Pentech Press; 邦訳 境界要素法入門, (昭 55), 培風館.
- (15) Brebbia, C.A. and Walker, S., *Boundary Element Techniques in Engineering*, (1980), Newness-Butterworths; 邦訳 境界要素法の基礎と応用, (昭 56), 培風館.
- (16) 田中・田中, 境界要素法—基礎と応用, (昭 57), 丸善.
- (17) 田中, 機械の研究, 連載講座, **34-1** (昭 57)~.
- (18) Zienkiewicz, O.C., ほか 2 名, *Int. J. Num. Meth. Eng.*, **11** (1977), 355.
- (19) Brebbia, C.A. and Georgion, P., *Appl. Math. Modelling*, **3** (1979), 212.
- (20) 田中, 機講論, No. 820-1 (昭 57-3), 12.
- (21) Massonnet, C.E., *Numerical Use of Integral Procedures*, in *Stress Analysis*, ed. by O.C. Zienkiewicz and G.S. Holister, (1965), 198, John Wiley & Sons.