周 邊 が 固 定 さ れ、直 交 弾 性 梁 に 乗 る 矩 形 板 の 解 法 及 實 験 に 就 て

正 員 工 學 士 藤 井 忠 二⁽¹⁾

Theory and Experiment on the Rectangular Plate clamped at the Periphery and Supported by Many Elastic Beams under Uniformly Distributed Load

By Chûji FUJII, Kôgakushi, Member

摘 要

著者は先に本會の會誌⁽²⁾に、周邊が自由に支へられたる矩形板が彈性梁に乗る場合の近似的解法に就て發表し、又其後此種の一二の問題に就て講演した事がある。本論文は之等の解法を今少し延長して多少一般的に取扱つたもので、其計算及實驗例として周邊が固定された場合をとつた。本計算は可成複雑にはなるが、其結果は實驗結果と良く一致する事を確めた。

1. 基本微分方程式

矩形板が彈性梁に依つて支へられて居る場合、之等兩者の接觸面には或力が呼起される。此力は彈性梁に就て云へば夫を變形させるに必要な外力で有り、矩形板に就て云へば其支持力で有り、又同時に夫に働く外力とも看做し得る。偕此彈性梁に及ぼす力と矩形板に及ぼす力とは云ふ迄もなく方向反對で等大で有るから、彈性梁を取り去り其代りに彈性梁に作用する力に等しい外力が矩形板に作用するものと考へれば、我々は此種の問題を複雑な荷重を受ける矩形板の問題に誘導する事が出来る。

今矩形板の邊の長さを夫々 a 及 b とし、直交軸 x 及 y を第 1 圖の如くとり、彈性梁は圖中點線で示せる如く矩形板の中心線に對して左右對稱に配置されて居て、之等の x 及 y 軸からの距離は夫々圖中に記入せる如き

第 1 圖

もので有るとする。今 $x = a_i$ 及 $y = b_i$ に於ける彈性梁の任意の箇所作用する外力を夫々 p_{a_i} 及 p_{b_i} とせば之等は次の様に書き表せる。

$$p_{a_i} = E_{a_i} I_{a_i} \frac{d^4 w_{x=a_i}}{dy^4}, \quad p_{b_i} = E_{b_i} I_{b_i} \frac{d^4 w_{y=b_i}}{dx^4} \quad \dots (1)$$

但上式中 E_{a_i} , E_{b_i} 及 I_{a_i} , I_{b_i} は夫々 $x = a_i$ 及 $y = b_i$ に於ける彈性梁の彈性係數及慣性能率、 w は矩形板の撓み、 $w_{x=a_i}$ 及 $w_{y=b_i}$ は w の式に $x = a_i$ 及 $y = b_i$ を代入したもので、夫々 $x = a_i$ 及 $y = b_i$ に於ける彈性梁の撓みを表す。尙他の彈性梁に就ても (1) に相當する式を導く事が出来る。従つて前述せる如く之等の力が外力として矩形板に作用するので有るから、唯今の場合の微分方程式は一般に次の如く書ける。

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \\ &= \frac{1}{N} \left\{ p - E_{a_0} I_{a_0} \frac{d^4 w_{x=a_0}}{dy^4} - E_{b_0} I_{b_0} \frac{d^4 w_{y=b_0}}{dx^4} \right. \\ & \quad \left. - 2 \sum_{i=1}^i E_{a_i} I_{a_i} \frac{d^4 w_{x=a_i}}{dy^4} - 2 \sum_{j=1}^j E_{b_j} I_{b_j} \frac{d^4 w_{y=b_j}}{dx^4} \right\} \quad \dots (2) \end{aligned}$$

$$\text{但 } N = \frac{E h^3}{12(1 - \nu^2)} \quad \dots (3)$$

本式中 E , h 及 ν は夫々矩形板の彈性係數、板の厚み及ポアソン比で有る。即上式の解式を求め 其中に含まれる未知係數が周邊の條件を満足する様に決定されれば、此處に問題は解決するので有る。然し乍ら此種の問題に斯る解法を用ひる事は非常に困難で有るから、著者は寧ろ周邊の條件を満足する如き或函數を撰び、此式が (2) を満足する様に未知係數を決定する方法を提唱する。

[第 35 卷 第 185 號

(1) 横濱船渠株式會社技師 (2) 機械學會誌第 34 卷 第 173 號

2. 周縁が固定或は自由に、又は之等兩者中間の任意の状態に支持され、幾多の直交弾性梁で支へられて居る矩形板が一樣な散布荷重を受ける場合

對稱の條件を考慮して撓みの式を次の様に假定して見る

$$w = \frac{p_0 a^4}{N} \sum_m \sum_n \frac{A_{mn}}{(m^2 + \lambda^2 n^2)^2} \left\{ \frac{1}{m\pi} \sin \frac{m\pi x}{a} + \alpha \left(\frac{x^2}{a^2} - \frac{x}{a} \right) \right\} \left\{ \frac{1}{n\pi} \sin \frac{n\pi y}{b} + \beta \left(\frac{y^2}{b^2} - \frac{y}{b} \right) \right\} \quad \dots\dots\dots (4)$$

$$\text{但} \quad m, n = 1, 3, 5, \dots\dots$$

$$\lambda = a/b \quad \dots\dots\dots (5)$$

上式で p_0 は單位面積に作用する荷重で A_{mn} は未知係數で有る。 α 及 β は單なる數で、 α, β を共に 0 とすれば周縁が自由に支へられた場合となり、之等を共に 1 とすれば周縁が完全に固定された場合となる、從つて α 及 β を夫々 0 と 1 の間の任意の値を與へる事に依つて、任意の周縁の條件を満足さす事が出来る。偕此處に一寸斷つて置きたい事は、若し弾性梁が矩形板に比して非常に丈夫に出来て居て、梁と梁との間隔が板の厚みに比して大なる場合には、弾性平面は一つの滑らかな曲面とは成らずに、幾多の波を持つ曲面に成る事が想像出来るので有るが、唯今は其影響は極く僅少で一つの滑らかな曲面に成るものと假定する點で有る。

偕以上の如き假定が成立すれば (4) は必ずしも不當な假定では無からう。今 (4) を (2) に代入して計算すれば次の様になる。

$$\begin{aligned} & \frac{p_0 \pi^3}{N} \sum_m \sum_n A_{mn} \frac{m^3}{(m^2 + \lambda^2 n^2)^2} \cdot \sin \frac{m\pi x}{a} \cdot \left[\frac{1}{n\pi} \sin \frac{n\pi y}{b} + \beta \left(\frac{y^2}{b^2} - \frac{y}{b} \right) \right] \\ & + \frac{2p_0 \lambda^2}{N} \sum_m \sum_n A_{mn} \frac{1}{(m^2 + \lambda^2 n^2)^2} \cdot \left[-m\pi \cdot \sin \frac{m\pi x}{a} + 2\alpha \right] \left[-n\pi \cdot \sin \frac{n\pi y}{b} + 2\beta \right] \\ & + \frac{p_0 \lambda^4 \pi^2}{N} \sum_m \sum_n A_{mn} \frac{n^5}{(m^2 + \lambda^2 n^2)^2} \left[\frac{1}{m\pi} \sin \frac{m\pi x}{a} + \alpha \left(\frac{x^2}{a^2} - \frac{x}{a} \right) \right] \cdot \sin \frac{n\pi y}{b} \\ & = \frac{p_0}{N} - \frac{E_{a3} I_{a3}}{N} \cdot \frac{p_0 a^4}{N} \sum_m \sum_n \frac{A_{mn}}{(m^2 + \lambda^2 n^2)^2} \left[\frac{\sin \frac{m\pi}{2}}{m\pi} - \frac{\alpha}{4} \right] \cdot \frac{1}{n\pi} \left(\frac{n\pi}{b} \right)^4 \cdot \sin \frac{n\pi y}{b} \\ & - \frac{E_{b3} I_{b3}}{N} \cdot \frac{p_0 a^4}{N} \sum_m \sum_n \frac{A_{mn}}{(m^2 + \lambda^2 n^2)^2} \cdot \frac{1}{m\pi} \left(\frac{m\pi}{a} \right)^4 \sin \frac{m\pi x}{a} \cdot \left[\frac{1}{n\pi} \sin \frac{n\pi}{2} - \frac{\beta}{4} \right] \\ & - 2 \cdot \sum_{i=1,2,\dots}^4 \frac{E_{ai} I_{ai}}{N} \cdot \frac{p_0 a^4}{N} \sum_m \sum_n \frac{A_{mn}}{(m^2 + \lambda^2 n^2)^2} \cdot \left[-\frac{\sin \frac{m\pi a_i}{a}}{m\pi} + \alpha \left(\frac{a_i^2}{a^2} - \frac{a_i}{a} \right) \right] \cdot \frac{1}{n\pi} \left(\frac{n\pi}{b} \right)^4 \sin \frac{n\pi y}{b} \\ & - 2 \cdot \sum_{i=1,2,\dots}^4 \frac{E_{bi} I_{bi}}{N} \cdot \frac{p_0 a^4}{N} \sum_m \sum_n \frac{A_{mn}}{(m^2 + \lambda^2 n^2)^2} \cdot \frac{1}{m\pi} \left(\frac{m\pi}{a} \right)^4 \sin \frac{m\pi x}{a} \cdot \left[\frac{\sin \frac{n\pi b_i}{b}}{n\pi} + \beta \left(\frac{b_i^2}{b^2} - \frac{b_i}{b} \right) \right] \dots\dots\dots (6) \end{aligned}$$

更に上式を適當にフリエーの級數に展開して、多少の書換へを施せば次の様になる

$$\begin{aligned} & \frac{p_0 \pi^2}{N} \sum_m \sum_n A_{mn} \cdot \frac{1}{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \\ & - \frac{8p_0 \beta}{N} \sum_m \sum_n \sum_q A_{mq} \left[\frac{m^3}{n^2(m^2 + \lambda^2 q^2)^2} + \frac{2\lambda^2 m}{n(m^2 + \lambda^2 q^2)^2} \right] \cdot \sin \frac{m\pi x}{a} \cdot \frac{n\pi y}{b} \\ & - \frac{8p_0 \lambda^2 \alpha}{N} \sum_m \sum_n \sum_p A_{pn} \left[\frac{\lambda^2 n^3}{m^2(p^2 + \lambda^2 n^2)^2} + \frac{2n}{m(p^2 + \lambda^2 n^2)^2} \right] \cdot \sin \frac{m\pi x}{a} \cdot \sin \frac{n\pi y}{b} \\ & - \frac{128p_0 \lambda^2 \alpha \beta}{N \pi^2} \sum_m \sum_n \sum_p \sum_q A_{pq} \frac{1}{mn(p^2 + \lambda^2 q^2)^2} \cdot \sin \frac{m\pi x}{a} \cdot \sin \frac{n\pi y}{b} \end{aligned}$$

昭和 7 年 9 月]

$$\begin{aligned}
&= \frac{16 p_0}{N \pi^2} \sum_m \sum_n \frac{1}{mn} \sin \frac{m \pi x}{a} \cdot \sin \frac{n \pi y}{b} \\
&\quad - \frac{2 p_0 \lambda^3 \pi^3}{N} \sum_m \sum_n \sum_p A_{pm} \frac{n^3}{(p^2 + \lambda^2 n^2)^2} \left\{ k_{a0} \left(\frac{\sin \frac{p \pi}{2}}{p \pi} - \frac{\alpha}{4} \right) \sin \frac{m \pi}{4} \right. \\
&\quad \left. + \sum_{i=1,2,\dots}^i k_{ai} \left[\frac{\sin \frac{p \pi a_i}{a}}{p \pi} + \alpha \left(\frac{a_i^2}{a^2} - \frac{a_i}{a} \right) \sin \frac{m \pi a_i}{a} \right] \right\} \sin \frac{m \pi x}{a} \sin \frac{n \pi y}{b} \\
&\quad - \frac{2 p_0 \pi^3}{N} \sum_m \sum_n \sum_q A_{mq} \frac{m^3}{(m^2 + \lambda^2 n^2)^2} \left\{ k_{b0} \left(\frac{\sin \frac{q \pi}{2}}{q \pi} - \frac{\beta}{4} \right) \sin \frac{n \pi}{2} \right. \\
&\quad \left. + \sum_{i=1,2,\dots}^i k_{bi} \left[\frac{\sin \frac{q \pi b_i}{b}}{q \pi} + \beta \left(\frac{b_i^2}{b^2} - \frac{b_i}{b} \right) \sin \frac{n \pi b_i}{b} \right] \right\} \sin \frac{m \pi x}{a} \sin \frac{n \pi y}{b} \dots \dots \dots (7)
\end{aligned}$$

但 $p, q = 1, 3, 5, \dots$

$$\left. \begin{aligned} k_{a0} &= \frac{E_a I_{a0}}{b N}, & k_{ai} &= \frac{E_{ai} I_{ai}}{b N} \\ k_{b0} &= \frac{E_{b0} I_{b0}}{b N}, & k_{bi} &= \frac{E_{bi} I_{bi}}{b N} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (8)$$

従つて上式が成立する爲めには未知係数 A_{mn} が次の關係式を満足せねばならぬ

$$\begin{aligned}
A_{mn} \cdot \frac{\pi^2}{mn} - 8 \beta \sum_p A_{mq} \left[\frac{m^3}{n^2 (m^2 + \lambda^2 q^2)^2} + \frac{2m}{n (m^2 + \lambda^2 q^2)^2} \right] \\
- 8 \lambda \alpha \sum_p A_{pn} \left[\frac{\lambda^2 n^3}{m^3 (p^2 + \lambda^2 n^2)^2} + \frac{2n}{m (p^2 + \lambda^2 n^2)^2} \right] + \frac{128 \lambda^2 \alpha \beta}{\pi^2} \sum_p \sum_q A_{pq} \frac{1}{mn (p^2 + \lambda^2 q^2)^2} \\
= \frac{16}{\pi^2 mn} - 2 \lambda^3 \pi^3 \sum_p A_{pm} \frac{n^3}{(p^2 + \lambda^2 n^2)^2} \left\{ k_{a0} \left(\frac{\sin \frac{p \pi}{2}}{p \pi} - \frac{\alpha}{4} \right) \sin \frac{m \pi}{a} \right. \\
\left. + \sum_{i=1,2,\dots}^i k_{ai} \left[\frac{\sin \frac{p \pi a_i}{a}}{p \pi} + \alpha \left(\frac{a_i^2}{a^2} - \frac{a_i}{a} \right) \sin \frac{m \pi a_i}{a} \right] \right\} \\
- 2 \pi^3 \sum_q A_{mq} \frac{m^3}{(m^2 + \lambda^2 q^2)^2} \left\{ k_{b0} \left(\frac{\sin \frac{q \pi}{2}}{q \pi} - \frac{\beta}{4} \right) \sin \frac{n \pi}{2} \right. \\
\left. + \sum_{i=1,2,\dots}^i k_{bi} \left[\frac{\sin \frac{q \pi b_i}{b}}{q \pi} + \beta \left(\frac{b_i^2}{b^2} - \frac{b_i}{b} \right) \sin \frac{n \pi b_i}{b} \right] \right\} \dots \dots \dots (9)
\end{aligned}$$

即之が未知係数 A_{mn} を決定する條件式で有る。偕上式より A_{mn} が求まれば、撓みの式 (4) が完全に決定された事になり、従つて又彎曲偶力、垂直應力及其他のものも求める事が出来る。之等の内最も大切な役割を成すものは勿論彎曲偶力(又は垂直應力)で有るから、唯今は他を省略して、之を求むる式のみを次に導いて置く。

(3) 機械學會誌第 34 卷第 173 號 1305—1306 頁參照

$$\left. \begin{aligned} M_x &= -p_0 a^2 \sum_m \sum_n \frac{A_{mn}}{(m^2 + \lambda^2 n^2)^2} \left[f(m, x) \cdot \varphi(n, y) + \nu \lambda^2 \cdot \varphi(m, x) \cdot f(n, y) \right] \\ M_y &= -p_0 a^2 \sum_m \sum_n \frac{A_{mn}}{(m^2 + \lambda^2 n^2)^2} \left[\lambda^2 \cdot \varphi(m, x) \cdot f(n, y) + \nu \cdot f(m, x) \cdot \varphi(n, y) \right] \end{aligned} \right\} \dots\dots(10)$$

$$\left. \begin{aligned} \text{但 } f(m, x) &= 2\alpha - m\pi \cdot \sin \frac{m\pi x}{a} \\ f(n, y) &= 2\beta - n\pi \cdot \sin \frac{n\pi y}{b} \\ \varphi(m, x) &= \frac{1}{m\pi} \cdot \sin \frac{m\pi x}{a} + \alpha \left(\frac{x^2}{a^2} - \frac{x}{a} \right) \\ \varphi(n, y) &= \frac{1}{n\pi} \cdot \sin \frac{n\pi y}{b} + \beta \left(\frac{y^2}{b^2} - \frac{y}{b} \right) \end{aligned} \right\} \dots\dots(11)$$

$$\left. \begin{aligned} M_{a_0} &= -p_0 a^2 b \lambda k_{a_0} \sum_m \sum_n \frac{A_{mn}}{(m^2 + \lambda^2 n^2)^2} \left[\frac{\sin \frac{m\pi}{2}}{m\pi} - \frac{\alpha}{4} \right] \left[2\beta - n\pi \cdot \sin \frac{n\pi y}{b} \right] \\ M_{a_1} &= -p_0 a^2 b \lambda k_{a_1} \sum_m \sum_n \frac{A_{mn}}{(m^2 + \lambda^2 n^2)^2} \left[\frac{\sin \frac{m\pi a_1}{a}}{m\pi} + \alpha \left(\frac{a_1^2}{a^2} - \frac{a_1}{a} \right) \right] \left[2\beta - n\pi \cdot \sin \frac{n\pi y}{b} \right] \end{aligned} \right\} \dots\dots(12)$$

$$\left. \begin{aligned} M_{a_i} &= -p_0 a^2 b \lambda k_{a_i} \sum_m \sum_n \frac{A_{mn}}{(m^2 + \lambda^2 n^2)^2} \left[\frac{\sin \frac{m\pi a_i}{a}}{m\pi} + \alpha \left(\frac{a_i^2}{a^2} - \frac{a_i}{a} \right) \right] \left[2\beta - n\pi \cdot \sin \frac{n\pi y}{b} \right] \\ M_{b_0} &= -p_0 a^2 b k_{b_0} \sum_m \sum_n \frac{A_{mn}}{(m^2 + \lambda^2 n^2)^2} \left[2\alpha - m\pi \cdot \sin \frac{m\pi x}{a} \right] \left[\frac{\sin \frac{n\pi}{2}}{n\pi} - \frac{\beta}{4} \right] \\ M_{b_1} &= -p_0 a^2 b k_{b_1} \sum_m \sum_n \frac{A_{mn}}{(m^2 + \lambda^2 n^2)^2} \left[2\alpha - m\pi \cdot \sin \frac{m\pi x}{a} \right] \left[\frac{\sin \frac{n\pi b_1}{b}}{n\pi} + \beta \left(\frac{b_1^2}{b^2} - \frac{b_1}{b} \right) \right] \\ M_{b_i} &= -p_0 a^2 b k_{b_i} \sum_m \sum_n \frac{A_{mn}}{(m^2 + \lambda^2 n^2)^2} \left[2\alpha - m\pi \cdot \sin \frac{m\pi x}{a} \right] \left[\frac{\sin \frac{n\pi b_i}{b}}{n\pi} + \beta \left(\frac{b_i^2}{b^2} - \frac{b_i}{b} \right) \right] \end{aligned} \right\} \dots\dots(13)$$

此處に M_x, M_y は矩形板の彎曲偶力で、 $M_{a_0}, M_{a_1}, \dots M_{a_i}$ 及 $M_{b_0}, M_{b_1}, \dots M_{b_i}$ は夫々 $x = a_0, x = a_1, \dots x = a_i$ 及 $y = b_0, y = b_1, \dots y = b_i$ に於ける弾性梁の彎曲偶力で有る。

3. 周邊が完全に固定され、一樣な散布荷重を受ける正方形板が、十字形の弾性梁で支へられて居る場合の計算例

第 2 圖

昭和 7 年 9 月]

計算の一例として、 $\lambda = a/b = 1$, $k_{a_0} = k_{b_0} = k$, $k_{a_1} = k_{a_2} = \dots = k_{a_i} = 0$, $k_{b_1} = k_{b_2} = \dots = k_{b_i} = 0$ で、周邊は完全に固定されて居る場合をとる。即斯る場合は第 2 圖に示す如く、板は正方形で、弾性梁は唯 2 本で之等が板の中央で十字に直交する場合で有る。此際未知係數 A_{mn} を決定する條件式は次の様になる。

$$\begin{aligned} A_{mn} &= \frac{8}{\pi^2} \sum_q A_{mq} \cdot \left(\frac{m^4}{n^2} + 2m^2 \right) \cdot \frac{1}{(m^2 + q^2)^2} \\ &\quad - \frac{8}{\pi^2} \sum_p A_{pm} \left(\frac{n^4}{m^2} + 2n^2 \right) \cdot \frac{1}{(p^2 + n^2)^2} + \frac{128}{\pi^4} \sum_p \sum_q A_{pq} \frac{1}{(p^2 + q^2)^2} \end{aligned}$$

$$= \frac{16}{\pi^4} - 2\pi k \sum_q A_{mq} \frac{m^4 n}{(m^2 + q^2)^2} \left(\frac{\sin \frac{q\pi}{2}}{q\pi} - \frac{1}{4} \right) \cdot \sin \frac{n\pi}{2} \\ - 2\pi k \sum_p A_{pm} \frac{mn^4}{(p^2 + n^2)^2} \left(\frac{\sin \frac{p\pi}{2}}{p\pi} - \frac{1}{4} \right) \cdot \sin \frac{m\pi}{2} \dots\dots\dots (14)$$

倍次節に示す実験例の場合と同一に $\nu = 0.3$, $k = 0.14415$ として、上式より A_{mn} を計算すれば次の如くなる。

$$\left. \begin{aligned} A_{11} &= +1.5505 & A_{17} &= A_{71} = +8.2814 \\ A_{13} &= A_{31} = +2.0673 & A_{37} &= A_{73} = +1.6466 \\ A_{33} &= +0.5051 & A_{57} &= A_{75} = +0.0159 \\ A_{15} &= A_{51} = -2.3166 & A_{77} &= +1.0822 \\ A_{35} &= A_{53} = -0.6486 & & \\ A_{55} &= -1.2967 & & \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (15)$$

此處に唯今の場合の撓み及彎曲偶力の諸式を今一度書いて見ると次の様になる。

$$w = \frac{p_0 a^4}{N} \sum_m \sum_n \frac{A_{mn}}{(m^2 + n^2)^2} \left\{ \frac{1}{m\pi} \sin \frac{m\pi x}{a} + \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{x}{a} \right) \right\} \left\{ \frac{1}{n\pi} \sin \frac{n\pi y}{a} + \left(\frac{y^2}{a^2} - \frac{y}{a} \right) \right\} \dots\dots\dots (4a)$$

$$\left. \begin{aligned} M_x &= -p_0 a^2 \sum_m \sum_n \frac{A_{mn}}{(m^2 + n^2)^2} \left[f_1(m, x) \cdot \varphi_1(n, y) + \nu \varphi_1(m, x) \cdot f_1(n, y) \right] \\ M_y &= -p_0 a^2 \sum_m \sum_n \frac{A_{mn}}{(m^2 + n^2)^2} \left[\varphi_1(m, x) \cdot f_1(n, y) + \nu f_1(m, x) \cdot \varphi_1(n, y) \right] \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (10a)$$

$$\left. \begin{aligned} \text{但} \quad f_1(m, x) &= 2 - m\pi \sin \frac{m\pi x}{a} \\ f_1(n, y) &= 2 - n\pi \sin \frac{n\pi y}{a} \\ \varphi_1(m, x) &= \frac{1}{m\pi} \sin \frac{m\pi x}{a} + \left(\frac{x^2}{a^2} - \frac{x}{a} \right) \\ \varphi_1(n, y) &= \frac{1}{n\pi} \sin \frac{n\pi y}{a} + \left(\frac{y^2}{a^2} - \frac{y}{a} \right) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (11a)$$

$$M_{\alpha} = -p_0 a^3 k \sum_m \sum_n \frac{A_{mn}}{(m^2 + n^2)^2} \left[\frac{\sin \frac{m\pi}{2}}{m\pi} - \frac{1}{4} \right] \left[2 - n\pi \sin \frac{n\pi y}{a} \right] \dots\dots\dots (12a)$$

$$M_{\beta} = -p_0 a^3 k \sum_m \sum_n \frac{A_{mn}}{(m^2 + n^2)^2} \left[2 - m\pi \sin \frac{m\pi x}{a} \right] \left[\frac{\sin \frac{n\pi}{2}}{n\pi} - \frac{1}{4} \right] \dots\dots\dots (13a)$$

今 (15) の A_{mn} の値を上諸式に入れて、撓み及彎曲偶力を求めると第 1 表及第 2 表の如くなる。

第 1 表 撓み w

x/a	y/a	$w \cdot \left(\frac{p_0 a^4}{N} \right)^{-1}$	x/a	y/a	$w \cdot \left(\frac{p_0 a^4}{N} \right)^{-1}$
1/8	4/8	0.000232	2/8	3/8	0.000563
2/8	"	0.000620	3/8	"	0.000813
3/8	"	0.000870	1/8	2/8	0.000151
4/8	"	0.000978	2/8	"	0.000451
1/8	3/8	0.000213	1/8	1/8	0.0000566

第 2 表 彎曲偶力 M_x, M_y 及 M_{β}

x/a	y/a	$M_x \cdot (p_0 a^2)^{-1}$	$M_y \cdot (p_0 a^2)^{-1}$	$M_{\beta} \cdot (p_0 a^2)^{-1}$
0	1/2	-0.03935	-0.01180	-0.005672
1/8	"	-0.008076	-0.000785	-0.002242
2/8	"	+0.008826	+0.008659	+0.0009866
3/8	"	+0.01527	+0.01389	+0.001785
4/8	"	+0.01626	+0.01626	+0.001803

4. 實 驗 例

以上の計算結果が如何なる程度に實驗結果と一致するか確かめて見る事にした。實驗に使用せる正方形板及弾性梁の材質は共に同一で、 $\nu = 0.3$ と假定し、弾性係数は $E = 2.116 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2$ で有つた。板の寸法は $a = b = 201.8 \text{ mm}$ 、 $h = 2.817 \text{ mm}$ で、又梁の寸法は第 3 圖に示して置いた。此際梁の慣性率率は $I = 0.005961 \text{ cm}^4$ で、従つて k の値は前節に記載せる如く $k = 0.14415$ となる。之等の板及梁を第 4 圖及寫眞 A に示す様に取付け、寫眞 B に示す装置で一樣な散布荷重を加へて撓みを測定した。撓みの測定装置は第 5 圖に示す如き装置に依り、其精度を $1/1000 \text{ mm}$ とした。此實驗で最も大切で且困難な點は、板の仕上にあつて出来るだけ曲り

の出ない様にして、厚みを一樣にする事、板と梁の接觸が良い事及其取付けが完全固定に最も近い状態になる事等で、之等三條件を満足さす爲めに可成苦心し、大半は長時間の摺合により目的に近いものを得る事が出来た。

第 5 圖 測定装置

第 3 圖 弾 性 梁

第 4 圖 實驗裝置

寫 眞 A

寫 眞 B

昭和 7 年 9 月]

諸本実験では荷重を $p_0 = 0.5 \text{ kg/cm}^2$ とし、之に相當する撓みを測定した。第3表は此實測値を示し、第6圖は之を圖示したもので有る。

次に實測せる撓みの曲線を基にして第7圖の様に $\partial w / \partial x$, $\partial^2 w / \partial x^2$ 及 $\partial w / \partial y$, $\partial^2 w / \partial y^2$ を求めて、 $y/a = 1/2$ に於ける彎曲偶力及垂直應力を求めれば、第4, 第5表及第8, 第9圖の様になる。尚以上の諸表には計算値を記入して實測値と比較出来る様にした。

以上の結果から判る様に計算値と實測値とは可成良く一致する。唯今の如き場合では最大應力は板に呼起されるものより梁の方が大きく倍近い値となる。勿論之等兩者の最大應力が相等しくなる様にすることが望ましいのは云ふ迄もない。

最後に本實驗を手傳はれた加藤及山本の兩氏に深く感謝の意を表す。

第3表 撓み w , 但 $p_0 = 0.5 \text{ kg/cm}^2$ の場合

x/a	y/a	w , mm	
		計 算 値	實 測 値
1/8	4/8	0.045	0.049
2/8	"	0.119	0.117
3/8	"	0.167	0.169
4/8	"	0.188	0.185
1/8	3/8	0.041	0.043
2/8	"	0.108	0.111
3/8	"	0.156	0.158
1/8	2/8	0.029	0.033
2/8	"	0.087	0.085
1/8	1/8	0.011	0.015

第6圖 撓み w

第7圖

第4表 彎曲偶力 M_x , M_y 及 M_{b_0} , 但 $p_0 = 0.5 \text{ kg/cm}^2$ の場合

x/a	y/a	M_x , kgcm/cm		M_y , kgcm/cm		M_{b_0} , kg cm	
		計 算 値	實 測 値	計 算 値	實 測 値	計 算 値	實 測 値
0	1/2	-8.028	-7.927	-2.407	-2.378	-23.375	-23.080
1/8	"	-1.648	—	-0.160	—	-5.120	-4.919
2/8	"	+1.801	—	+1.767	—	+4.066	+3.973
3/8	"	+3.116	—	+2.834	—	+7.245	+6.950
4/8	"	+3.318	+3.379	+3.318	+3.379	+7.430	+7.568

第5表 垂直應力 σ_x , σ_y 及 σ_{b_0} , 但 $p_0 = 0.5 \text{ kg/cm}^2$ の場合

x/a	y/a	σ_x , kg/cm ²		σ_y , kg/cm ²		σ_{b_0} , kg/cm ²	
		計 算 値	實 測 値	計 算 値	實 測 値	計 算 値	實 測 値
0	1/2	± 607	± 599	± 182	± 180	{ - 860 + 1103	{ - 849 + 1088
1/8	"	± 125	—	± 121	—	{ - 189 + 242	{ - 181 + 232
2/8	"	± 136	—	± 134	—	{ + 150 - 192	{ + 146 - 187
3/8	"	± 236	—	± 215	—	{ + 267 - 342	{ + 256 - 328
4/8	"	± 251	± 255	± 251	± 255	{ + 274 - 351	{ + 278 - 357

第 8 圖 垂直應力 σ_x 及 σ_y 第 9 圖 垂直應力 σ_{b_0}

二平板にて圧せられたるローラーの 最大剪断内力の分布

(昭和 7 年 4 月 7 日第 2 回工學會大會機械學會部會講演會に於て講演)

正員 工學士 覺 前 睦 夫⁽¹⁾

Die Verteilung der maximalen Schubspannung in einer
Walze, der zwischen zwei parallelen Platten durch
die Last zusammengedrückt wird

Von Mutuo KAKUZEN, Kôgakusi, Mitglied

摘 要

本文は H. Hertz の式に依つて、先づローラー内の任意の點に於ける内力を求め、次に其等内力を用ひて最大剪断内力の式を計算して、其の値が一定なる分布曲線を畫いたものである。

今問題を普通一般に行はれて居る様に彈性體の問題として二次元的に取扱ふ。又ローラーと二平板とは面にて接觸する筈であるが、計算の便宜上、線にて接するものとする。第 1 圖に示されて居る様に Y を横軸に Z を縦軸に取り、 σ_y , σ_z を各 Y 軸、 Z 軸の方向に作用する圧縮内力とし、又 τ_{yz} を Y 軸に垂直なる平面に於て Z 軸の方向に作用する剪断内力とする。然る時は平衡の條件より σ_y , σ_z 及 τ_{yz} 間に次の關係式が成立する。

$$\left. \begin{aligned} \partial \sigma_y / \partial y + \partial \tau_{yz} / \partial z &= 0 \\ \partial \sigma_z / \partial z + \partial \tau_{yz} / \partial y &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (1)$$

σ_y , σ_z 及 τ_{yz} を内力函數 F の助によつて表はすと

$$\left. \begin{aligned} \sigma_y &= \partial^2 F / \partial z^2, \quad \sigma_z = \partial^2 F / \partial y^2 \\ \tau_{yz} &= -\partial^2 F / \partial y \partial z \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2)$$

但し F に對する條件として F は次の關係を満足しなければならぬ。

$$\nabla^4 F = (\partial^2 / \partial y^2 + \partial^2 / \partial z^2)^2 F = 0$$

(1) 安治川鐵工所技師

昭和 7 年 9 月]

new dynamometer devised by the authors, the recording of the cutting force is carried out by a pure mechanical method; a rectangular bar is twisted by the force, and its angular displacement is magnified by means of levers and is recorded. As its construction is very simple it is useful not only in laboratories, but also in workshops. So far as the depression of the tool point is concerned, it is superior to a certain hydraulic dynamometer made in Germany. The said depression in the authors' dynamometer, for example, when the deflection of the recording pen is 20 mm, is 39% of that in the hydraulic dynamometer at the corresponding deflection of the pen, and 21% when the other fulcrum is used. The capacity of the dynamometer may be easily altered by altering the torsion bar or the ratio of magnification. It is proved by calibration that displacements of the recording pen are in almost perfect rectilinear relation with the loads, and that there is neither hysteresis nor time effect.

In the present paper, the results of measurements are also reported. The experiments were carried out for mild steel, cast iron, gun metal, copper, aluminium, bakelite and ebonite at various combinations of feeds and cutting depths, which make the cutting area 1.26, 0.945, 0.623 or 0.315 mm².

(Original p. 914)

THEORY AND EXPERIMENT ON A RECTANGULAR PLATE CLAMPED AT THE PERIPHERY AND SUPPORTED BY MANY ELASTIC BEAMS UNDER UNIFORMLY DISTRIBUTED LOAD

Read before the 2nd General Meeting of the Society of
Engineering, S.M.E. Section, Apr. 7, 1932

By

Chûji FUJII, *Kôgakushi, Member*

Engineer, Yokohama Dock Co. Ltd., Yokohama

In this paper, an attempt is made to solve the problem of a rectangular plate which is simply supported or perfectly or imperfectly clamped at the periphery and supported by many elastic beams parallel to the edges of plate and subjected to a distributed load in any manner.

To simplify the problem, it may be assumed that the elastic beams lie symmetrically to the center line of the plate and the latter is subjected to an uniformly distributed load. The reaction, produced by the elastic beams can be considered as the external force acting on the plate, so the differential equation of an elastic plane can be written as follows :—

$$N\Delta\omega = p_0 - E_{a/2} I_{a/2} \frac{d^4 w_{x=a/2}}{dy^4} - E_{b/2} I_{b/2} \frac{d^4 w_{y=b/2}}{dx^4} \\ - 2 \sum_{i=1}^i \left[E_{a_i} I_{a_i} \frac{d^4 w_{x=a_i}}{dy^4} + E_{b_i} I_{b_i} \frac{d^4 w_{y=b_i}}{dx^4} \right] \dots\dots\dots (1)$$

$$\text{here, } \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

ω = deflection of the plate.

$N = Eh^3/12(1 - \nu^2)$

E = modulus of elasticity

ν = Poisson's ratio of the plate.

h = thickness of the plate,

September, 1932]

p_0 = uniform load,

a, b = breadth and length of the plate respectively,

x, y = rectangular co-ordinates, the origin being taken at the corner and their directions coincide with sides of the plate,

$E_{a/2}, E_{a_i}, E_{b/2}, E_{b_i}$ = moduli of elasticity of the elastic beams at $x = a/2, x = a_i, y = b/2$ and $y = b_i$ respectively,

$I_{a/2}, I_{a_i}, I_{b/2}, I_{b_i}$ = moments of inertia of the elastic beams at $x = a/2, x = a_i, y = b/2$ and $y = b_i$ respectively,

Now the author assumed that the deflection of the plate can be represented by the following formula,

$$\omega = \frac{p_0 a^4}{N} \sum_m \sum_n \frac{A_{mn}}{(m^2 + \lambda^2 n^2)^2} \left[\frac{1}{m\pi} \sin \frac{m\pi x}{a} + \alpha \left(\frac{x^2}{a^2} - \frac{x}{a} \right) \right] \cdot \left[\frac{1}{n\pi} \sin \frac{n\pi y}{b} + \beta \left(\frac{y^2}{b^2} - \frac{y}{b} \right) \right] \dots (2)$$

$m, n = 1, 3, 5, \dots$

In this equation, λ is equal to a/b and for α, β we put the next limitations, i.e. $0 \leq \alpha \leq 1, 0 \leq \beta \leq 1$. Therefore, for $\alpha = \beta = 0$ or $\alpha = \beta = 1$, the equation (2) satisfies the boundary condition of the freely supported or perfectly clamped rectangular plate respectively. But, the equation (2) is not necessarily the solution of eq. (1), hence we can determine the unknown coefficient A_{mn} in eq. (2) as to satisfy this condition.

The author has introduced the general conditional equation for A_{mn} , and for examples, some numerical calculations and experiments on special cases have been carried out. From these results, he has confirmed that the theoretial results well coincide with those of the experiments.

(Original p. 924)

DIE VERTEILUNG DER MAXIMALEN SCHUBSPANNUNG IN EINER WALZE, DIE ZWISCHEN ZWEI PARALLELEN PLATTEN DURCH DIE LAST ZUSAMMENGEDRUECKT WIRD

Vorgetragen auf der 2. Hauptversammlung des Vereines
der Ingenieure, S.M.E. Abteilung, Apr. 7, 1932

Von

Mutuo KAKUZEN, *Kôgakusi Mitglied*

Maschinenbauingenieur, Adikawa Eisen Werke, Ôsaka

Es behandelt sich um die Spannungen in irgend einem Punkt in Walze zuerst und nachher die maximale Schubspannung:

Die Spannungen σ_y, σ_z und τ_{yz} lassen sich leicht unter der Benutzung von Spannungsfunktion berechnen und damit wird die in folgender Beziehung stehende maximale Schubspannung $\tau_{\max}$ berechnet,

$$\tau_{\max}^2 = \frac{1}{4} (\sigma_y - \sigma_z)^2 + \tau_{yz}^2$$

$$\text{also, } \tau_{\max}^2 = \left(\frac{p}{\pi l} \right)^2 \left[\frac{\cos^2 \varphi_1}{r_1^2} + \frac{\cos^2 \varphi_2}{r_2^2} + \frac{2 \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 \cos 2(\varphi_1 + \varphi_2)}{r_1 r_2} \right]$$

Die Punkte mit konstantem Wert $K \equiv \tau_{\max} / \frac{p}{\pi l a}$ sind errechnet und mit Kurven zeichnerisch dargestellt. Die Schar von auf dieser Weise erhaltenen K-Kurven stimmt ziemlich gut mit der schon experimental erhaltenen Isochromen-Kurven in Photoelastizität überein.

(Original p. 931)

[Vol. XXXV, No. 185]