不等邊不等厚山型断面材に於ける 振り應力に就て (「接合法」による解法)

(昭和7年4月28日第214回講演會に於て講演)

准員 工學士 近 藤 政 市⁽¹⁾

Über den Drehungsspannungen der Winkeleisen mit endlichen und ungleichen Flanschen (Lösung von der „Zusammenfügungsmethode“)

Von Masaiti KONDÔ, Kôgakusi, Mitglied

摘 要

山型断面材 (Winkelleisenprofil) の振り應力に就ては多數の研究があるが最も一般的なる不等邊不等厚山型材に對する解法は未解決の狀況にある。山型断面材は直角に彎曲した不連續部分を含み、解法の困難點は主としてこの不連續部分に歸する。本文はこの困難點を著者考案の“接合法”により解決し、不等邊不等厚山型断面材の振り應力線、應力分布等を考究したものである。曩に内燃機ピストンの熱傳導問題の一解法として“接合法”を發表したとき、この“接合法”は不連續部分に對する一解法として、熱傳導問題のみならず他の方面の理論にも應用し得べしと述べて置いたが、本文はその1例である。尙ほ他の應用に就ても研究の進むを俟ち追々發表し得る見込である。

1. 解法の基礎式及び「接合法」の概要

任意断面形の長い棒の長さの方向に z 軸を取り、 $z = z$ の位置で z 軸に直角な断面 (この断面は固定端の影響を受けない程度に固定端から離れてゐるとする) 内に直交軸 x, y を取る。振りモーメント M が z 軸のまはりにかゝつたときその断面内の任意の一點の變位の三軸の方向の成分を u, v, w とし、直接應力の成分を P_1, P_2, P_3 とし、剪應力の成分を S_1, S_2, S_3 とする。(第1圖) 今單位長に就ての捩れ角を τ とすれば

$$u = -\tau yz, \quad v = \tau xz \quad \dots\dots\dots (1).$$

St. Venant の理論に従ひ w は z に關係せず x, y のみの函数と考へる。即ち $w = w(x, y)$ 。

然るときは彈性學の基本式から $P_1 = P_2 = P_3 = 0$ 、 $S_3 = 0$ となり、 G を材料の剛性率とすれば、接觸面の剪應力のみ残つて

$$\begin{aligned} S_1 &= G \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \tau y \right), \\ S_2 &= G \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \tau x \right) \\ &\dots\dots\dots (2). \end{aligned}$$

彈性學の基本式から

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0$$

を得、これより

$$\frac{\partial S_1}{\partial x} + \frac{\partial S_2}{\partial y} = 0.$$

これは次の如き關係の應力函数 ψ が存在することを示し、

$$\begin{aligned} S_1 &= \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad S_2 = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \\ &\dots\dots\dots (3) \end{aligned}$$

これと (2) とから

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = -2G\tau \quad \dots\dots (4).$$

これは断面内の各點で満足さるべき條件式である。

断面の周邊では剪應力は周邊に沿ふて働くべき故、断面形が $y = y(x)$ で表はされるとせば $S_2/S_1 = dy/dx$,

第 1 圖

(1) 横濱高等工業學校教授 (2) E. Trefftz, Math. Ann., 1921 の二邊が ∞ なる等厚山型断面の解法 (conformal transformation を用ふる方法), E. Trefftz, Z.A.M.M., 1922 の二邊が ∞ なる等厚山型断面の隅を丸めた場合の解法 (尙この問題には C. Dassen, Z.A.M.M., 1923 の研究がある), 津村利光氏, 機械學會誌, 昭和6年3月の隅を丸めた等邊等厚山型断面の解法, A. u. L. Föppl, Drang u. Zwang, Bd. II, S. 70 及び Z.A.M.M., 1931, S. 244 所載の近似的方法, 尙詳細は Handbuch der Physik, Bd. VI, Kap. 3, II を参照 (3) 著者, 不連續分を有する導體 (例へば内燃機ピストン) に於ける傳熱問題の一解法, 機械學會誌, 昭和6年9月

故に $(\partial\psi/\partial x)dx + (d\psi/\partial y)dy = 0$, 即ち $d\psi = 0$ 故に
周邊條件と振りモーメント M とは夫々

$$\psi = \text{const} = 0 \dots\dots\dots (5),$$

$$M = \iint (S_2x - S_1y)dx dy = 2 \iint \psi dx dy \dots (6).$$

故に上記の應力函数 ψ を求め得れば z 軸のまわりに角 τ だけ振つたときの剪應力、變位、振りモーメントとは夫々 (3) 式、(1)(2) 式及 (6) 式から算出し得る。又 (6) 式を逆算すれば或振りモーメント M に對する振れ角 τ を算出し得る。結局問題の主眼は微分方程式 (4) を周邊條件 (5) の下に解くことになる。

かくして求めた應力函数 ψ に就き、 $\psi = \text{常數} = \text{パラメーター}$ として畫いた曲線群は振り應力線であつて、剪應力はこの曲線の切線方向に働く。

又角 τ だけ振るとき各點の變位は振りモーメントの働く軸 z の位置により變化するが、剪應力の大きさは變化しないと云ふ特徴がある。

扱てこれ等の基礎式を不等邊不等厚山型断面材に應用するのである

が、断面形の比例、座標軸及原點を第2圖の如くにとる。

邊の長さ a 及 b , 邊の厚さ c 及 d .

今の場合各點の變位は問題としないことにするから、座標軸及原點を圖の如く撰ぶのが便利である。

仍つて、問題はこの断面形に對して周邊條件 (5) 式を満足する様基礎式 (4) を解けばよい。即ち

$$\Delta\psi = -2G\tau \dots\dots\dots (4')$$

$$\left\{ \begin{array}{l} OA \text{ 即 } y=0 \text{ に沿ひて } \psi=0, \\ AB \text{ 即 } x=a \text{ " } \psi=0, \\ BC \text{ 即 } y=d \text{ " } \psi=0, \\ CD \text{ 即 } x=c \text{ " } \psi=0, \\ DE \text{ 即 } y=b \text{ " } \psi=0, \\ EO \text{ 即 } x=0 \text{ " } \psi=0, \end{array} \right\} \text{の下に解けばよい。}$$

これを解くのに「接合法」を利用する。即ち先づこの*

I. 矩形 I に對する解 ψ_I

基礎式

$$\frac{\partial^2 \psi_I}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi_I}{\partial y^2} = -2G\tau,$$

周邊條件

$$\left\{ \begin{array}{ll} \psi_I = f(y) & x=c, \\ \psi_I = 0 & y=a, \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{ll} \psi_I = 0 & y=0, \\ \psi_I = 0 & y=a. \end{array} \right.$$

これを解く爲に、 $\psi_I = G\tau y(d-y) + \varphi$ とすれば

昭和7年10月]

*断面を單體 I (FABC), II (OFCG) 及 III (GCDE) の三矩形に分けこの單體に對して解を求め、後これを適當な方法で接ぎ合はせ全體の解を得るのである。その爲に I と II との接合面 FC, 及 II と III との接合面 GC に沿つて、 ψ の分布が夫々 $f(y)$ 及 $\varphi(x)$ なる假定函数で表はされると考へる。[この $f(y)$ 及 $\varphi(x)$ は兩端で零となるべき故 Fourier の sine 級數で表はし得る。] $f(y)$ 及 $\varphi(x)$ は中間階梯に必要な未知函数であつて後程定められるものである。かく $f(y)$ 及 $\varphi(x)$ を假定すれば單體 I, II, III に對し周邊條件が揃ふから、各單體に對し基礎式 (4) を解くは容易であり、この解を $\psi_I, \psi_{II}, \psi_{III}$ とする。こゝで最後に $f(y)$ 及 $\varphi(x)$ を定めねばならない。それには接合面 FC 及 GC に於て ψ が連續的に分布せねばならぬ性質を利用する。即ち FC 及 GC に直角な方向の ψ の傾斜 (gradient) は I, II 及 III の間で等しかるべき性質、即ち

$$\left(\frac{\partial \psi_I}{\partial x} \right)_{x=0} = \left(\frac{\partial \psi_{II}}{\partial x} \right)_{x=0}, \quad \left(\frac{\partial \psi_{II}}{\partial y} \right)_{y=d} = \left(\frac{\partial \psi_{III}}{\partial y} \right)_{y=d}$$

を用ひる。これが「接合法」の主要であつて、實際方法は以下の通りである。

2. $f(y)$ 及 $\varphi(x)$ を假定したときの解

1. に述べたが $f(y)$ 及 $\varphi(x)$ は兩端で零なるべき故、次の如き Fourier の無限級數で表はすのが最も便利である。即ち

$$f(y) = G\tau c^2 \left\{ A_1 \sin \frac{\pi}{d} y + A_2 \sin \frac{2\pi}{d} y + \dots \right\}$$

$$= G\tau c^2 \sum_{p=1}^{\infty} A_p \sin \frac{p\pi}{d} y,$$

$$\varphi(x) = G\tau c^2 \left\{ B_1 \sin \frac{\pi}{c} x + B_2 \sin \frac{2\pi}{c} x + \dots \right\}$$

$$= G\tau c^2 \sum_{q=1}^{\infty} B_q \sin \frac{q\pi}{c} x.$$

これ等の假定函数 $f(y)$ 及 $\varphi(x)$ は A_p, B_q なる未知係數を含むが、これ等の係數は次節3.の方式から連續性の式より定められる。式中 $G\tau c^2$ なる常數は應力函数 ψ と「元」を一致させる目的で加へたものである。

11

近 藤 政 市

基礎式は

$$\frac{\partial^2 \psi_I}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi_I}{\partial y^2} = -2G\tau + \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \right) = -2G\tau$$

即ち

$$\partial^2 \varphi / \partial x^2 + \partial^2 \varphi / \partial y^2 = \Delta \varphi = 0.$$

周邊條件は

$$\begin{cases} \varphi = f(y) - G\tau y(d-y) & x=c, & \varphi=0 & y=0, \\ \varphi = -G\tau y(d-y) & x=a, & \varphi=0 & y=d. \end{cases} \quad \text{とする。}$$

仍つて φ を 2 分して $\varphi = \varphi_a + \varphi_b$ とし、

$$\text{爰に} \quad \begin{cases} \Delta \varphi_a = 0 \\ \varphi_a = f(y) - G\tau y(d-y) & x=c, \\ \varphi_a = 0 & x=a, \\ \varphi_a = 0 & y=0, \\ \varphi_a = 0 & y=d, \end{cases} \quad \begin{cases} \Delta \varphi_b = 0 \\ \varphi_b = 0 & x=c, \\ \varphi_b = -G\tau y(d-y) & x=a, \\ \varphi_b = 0 & y=0, \\ \varphi_b = 0 & y=d. \end{cases}$$

 φ_a :—

$$\varphi_a = \sum_m C_m \sinh m(a-x) \sin my$$

とすれば、基礎式及周邊條件の第 2, 第 3 は満足される。第 4 から

$$(\varphi_a)_{y=d} = \sum_m C_m \sinh m(a-x) \sin md = 0$$

故に

$$\sin md = 0, \quad m = \frac{n\pi}{d} \quad (n = 1, 2, 3, \dots).$$

故に

$$\varphi_a = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sinh \frac{n\pi}{d}(a-x) \sin \frac{n\pi}{d}y.$$

周邊條件の第 1 から

$$(\varphi_a)_{x=c} = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sinh \frac{n\pi}{d}(a-c) \sin \frac{n\pi}{d}y = f(y) - G\tau y(d-y),$$

然るに假定により

$$f(y) = G\tau c^2 \sum_{p=1}^{\infty} A_p \sin \frac{p\pi}{d}y.$$

又 $-G\tau y(d-y)$ は Fourier の級数に展開して

$$-G\tau y(d-y) = -\frac{2G\tau}{d} \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{n\pi}{d}y \int_0^d \lambda(d-\lambda) \sin \frac{n\pi}{d}\lambda d\lambda = \frac{4G\tau d^2}{\pi^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{((-1)^n - 1)}{n^3} \sin \frac{n\pi}{d}y.$$

故に

$$(\varphi_a)_{x=c} = G\tau c^2 \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ A_n + \frac{4d^2}{\pi^3 c^2} \frac{((-1)^n - 1)}{n^3} \right\} \sin \frac{n\pi}{d}y,$$

故に

$$C_n = \frac{G\tau c^2}{\sinh \frac{n\pi}{d}(a-c)} \left\{ A_n + \frac{4d^2}{\pi^3 c^2} \frac{((-1)^n - 1)}{n^3} \right\},$$

故に結局

$$\varphi_a = G\tau c^2 \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ A_n + \frac{4d^2}{\pi^3 c^2} \frac{((-1)^n - 1)}{n^3} \right\} \frac{\sinh \frac{n\pi}{d}(a-x)}{\sinh \frac{n\pi}{d}(a-c)} \sin \frac{n\pi}{d}y.$$

 φ_b :—

$$\varphi_b = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sinh \frac{n\pi}{d}(x-c) \sin \frac{n\pi}{d}y \quad \text{とすれば}$$

基礎式及周邊條件の第 1, 第 3, 第 4 を満足する。第 2 から

$$(\varphi_b)_{x=a} = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sinh \frac{n\pi}{d}(a-c) \sin \frac{n\pi}{d}y = -G\tau y(d-y).$$

然して Fourier の級数により

$$-G\tau y(d-y) = \frac{4G\tau d^2}{\pi^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{((-1)^n - 1)}{n^3} \sin \frac{n\pi}{d}y,$$

故に

$$C_n = \frac{4G\tau d^2}{\pi^3} \frac{((-1)^n - 1)}{n^3} \frac{1}{\sinh \frac{n\pi}{d}(a-c)}$$

結局

$$\varphi_b = \frac{4G\tau d^2}{\pi^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{((-1)^n - 1)}{n^3} \frac{\sinh \frac{n\pi}{d}(x-c)}{\sinh \frac{n\pi}{d}(a-c)} \sin \frac{n\pi}{d} y.$$

仍つて矩形 I に對する解 ψ_I は

$$\begin{aligned} \psi_I &= G\tau y(d-y) + \varphi_a + \varphi_b \\ &= G\tau y(d-y) + G\tau c^2 \sum_{n=1}^{\infty} A_n \frac{\sinh \frac{n\pi}{d}(a-x)}{\sinh \frac{n\pi}{d}(a-c)} \sin \frac{n\pi}{d} y \\ &\quad + \frac{4G\tau d^2}{\pi^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{((-1)^n - 1)}{n^3} \frac{\sinh \frac{n\pi}{d}(a-x) + \sinh \frac{n\pi}{d}(x-c)}{\sinh \frac{n\pi}{d}(a-c)} \sin \frac{n\pi}{d} y. \end{aligned}$$

II. 矩形 II に對する解 ψ_{II}

基礎式

$$\Delta\psi_{II} = -2G\tau$$

周邊條件

$$\begin{cases} \psi_{II} = 0 & x=0, & \psi_{II} = 0 & y=0, \\ \psi_{II} = f(y) & x=c, & \psi_{II} = \varphi(x) & y=d. \end{cases}$$

これを解く爲に $\psi_{II} = G\tau y(d-y) + \varphi$ とすれば

$$\begin{cases} \Delta\varphi = 0, \\ \varphi = -G\tau y(d-y) & x=0, & \varphi = 0 & y=0, \\ \varphi = f(y) - G\tau y(d-y) & x=c, & \varphi = \varphi(x) & y=d. \end{cases} \text{となる。}$$

仍つて、 φ を 3 分して $\varphi = \varphi_a + \varphi_b + \varphi_c$,

$$\begin{aligned} \text{爰に} \quad \begin{cases} \Delta\varphi_a = 0, \\ \varphi_a = -G\tau y(d-y) & x=0, \\ \varphi_a = 0 & x=c, \\ \varphi_a = 0 & y=0, \\ \varphi_a = 0 & y=d, \end{cases} \quad \begin{cases} \Delta\varphi_b = 0, \\ \varphi_b = 0 & x=0, \\ \varphi_b = f(y) - G\tau y(d-y) & x=c, \\ \varphi_b = 0 & y=0, \\ \varphi_b = 0 & y=d. \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{cases} \Delta\varphi_c = 0 \\ \varphi_c = 0 & x=0, & \varphi_c = 0 & y=0, \\ \varphi_c = 0 & x=c, & \varphi_c = \varphi(x) & y=d. \end{cases}$$

前と全く同様にして

$$\begin{aligned} \varphi_a &= \frac{4G\tau d^2}{\pi^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{((-1)^n - 1)}{n^3} \frac{\sinh \frac{n\pi}{d}(c-x)}{\sinh \frac{n\pi}{d}c} \sin \frac{n\pi}{d} y, \\ \varphi_b &= G\tau c^2 \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ A_n + \frac{4d^2}{\pi^3 c^2} \frac{((-1)^n - 1)}{n^3} \right\} \frac{\sinh \frac{n\pi}{d}x}{\sinh \frac{n\pi}{d}c} \sin \frac{n\pi}{d} y, \\ \varphi_c &= G\tau c^2 \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin \frac{n\pi}{c} x \frac{\sinh \frac{n\pi}{d}y}{\sinh \frac{n\pi}{d}c}. \end{aligned}$$

昭和 7 年 10 月]

仍つて矩形 II に對する解 ψ_{II} は

$$\begin{aligned}\psi_{II} &= G\tau y(d-y) + \varphi_a + \varphi_b + \varphi_c \\ &= G\tau y(d-y) + G\tau c^2 \sum_{n=1}^{\infty} A_n \frac{\sinh \frac{n\pi}{d} x}{\sinh \frac{n\pi}{d} c} \sin \frac{n\pi}{d} y + G\tau c^2 \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin \frac{n\pi}{c} x \frac{\sinh \frac{n\pi}{c} y}{\sinh \frac{n\pi}{c} d} \\ &\quad + \frac{4G\tau d^2}{\pi^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{((-1)^n - 1)}{n^3} \frac{\sinh \frac{n\pi}{d}(c-x) + \sinh \frac{n\pi}{d} x}{\sinh \frac{n\pi}{d} c} \sin \frac{n\pi}{d} y.\end{aligned}$$

III. 矩形 III に對する解 ψ_{III}

基礎式 $\Delta\psi_{III} = -2G\tau$.

周邊條件
$$\begin{cases} \psi_{III} = 0 & x = 0, & \psi_{III} = \varphi(x) & y = d, \\ \psi_{III} = 0 & x = c, & \psi_{III} = 0 & y = b. \end{cases}$$

これを解く爲に $\psi_{III} = G\tau(y-d)(b-y) + \varphi$ とすれば

$$\begin{cases} \Delta\varphi = 0, \\ \varphi = -G\tau(y-d)(b-y) & x = 0, & \varphi = \varphi(x) & y = d, \\ \varphi = -G\tau(y-d)(b-y) & x = c, & \varphi = 0 & y = b. \end{cases}$$

仍つて φ を 3 分して $\varphi = \varphi_a + \varphi_b + \varphi_c$,

$$\begin{aligned}\text{爰に} \quad \begin{cases} \Delta\varphi_a = 0, \\ \varphi_a = -G\tau(y-d)(b-y) & x = 0, \\ \varphi_a = 0 & x = c, \\ \varphi_a = 0 & y = d, \\ \varphi_a = 0 & y = b. \end{cases} \quad \begin{cases} \Delta\varphi_b = 0, \\ \varphi_b = 0 & x = 0, \\ \varphi_b = -G\tau(y-d)(b-y) & x = c, \\ \varphi_b = 0 & y = d, \\ \varphi_b = 0 & y = b. \end{cases} \\ \begin{cases} \Delta\varphi_c = 0, \\ \varphi_c = 0 & x = 0, \\ \varphi_c = 0 & x = c, \end{cases} \quad \begin{cases} \varphi_c = \varphi(x) & y = d, \\ \varphi_c = 0 & y = b. \end{cases}\end{aligned}$$

前と同様に

$$\begin{aligned}\varphi_a &= \frac{4G\tau(b-d)^2}{\pi^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{((-1)^n - 1)}{n^3} \frac{\sinh \frac{n\pi}{b-d}(c-x)}{\sinh \frac{n\pi}{b-d} c} \sin \frac{n\pi}{b-d}(y-d), \\ \varphi_b &= \frac{4G\tau(b-d)^2}{\pi^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{((-1)^n - 1)}{n^3} \frac{\sinh \frac{n\pi}{b-d} x}{\sinh \frac{n\pi}{b-d} c} \sin \frac{n\pi}{b-d}(y-d), \\ \varphi_c &= G\tau c^2 \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin \frac{n\pi}{c} x \frac{\sinh \frac{n\pi}{c}(b-y)}{\sinh \frac{n\pi}{c}(b-d)}.\end{aligned}$$

仍つて矩形 III に對する解 ψ_{III} は

$$\begin{aligned}\psi_{III} &= G\tau(y-d)(b-y) + \varphi_a + \varphi_b + \varphi_c \\ &= G\tau(y-d)(b-y) \\ &\quad + \frac{4G\tau(b-d)^2}{\pi^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{((-1)^n - 1)}{n^3} \frac{\sinh \frac{n\pi}{b-d}(c-x) + \sinh \frac{n\pi}{b-d} x}{\sinh \frac{n\pi}{b-d} c} \sin \frac{n\pi}{b-d}(y-d) \\ &\quad + G\tau c^2 \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin \frac{n\pi}{c} x \frac{\sinh \frac{n\pi}{c}(b-y)}{\sinh \frac{n\pi}{c}(b-d)}.\end{aligned}$$

3. $f(y)$ 及 $\varphi(x)$ の決定

$f(y)$ 及 $\varphi(x)$ が分つてゐれば所要の解法は 2. の様にして求められる。最後に残る問題は $f(y)$ 及 $\varphi(x)$ を決めることであるが、その爲には級数の係数 $A_1, A_2, \dots, A_p, \dots; B_1, B_2, \dots, B_q, \dots$ を接合面 FC 及 GC に於ける ψ の連続性から決めればよい。級数 $f(y)$ 及 $\varphi(x)$ は勿論事實上無限項を取る必要はなく次の如く N 項で表はす。即ち

$$\begin{aligned} f(y) &= G\tau c^2 \left\{ A_1 \sin \frac{\pi}{d} y + A_2 \sin \frac{2\pi}{d} y + \dots + A_N \sin \frac{N\pi}{d} y \right\} \\ &= G\tau c^2 \sum_{p=1}^N A_p \sin \frac{p\pi}{d} y, \\ \varphi(x) &= G\tau c^2 \left\{ B_1 \sin \frac{\pi}{c} x + B_2 \sin \frac{2\pi}{c} x + \dots + B_N \sin \frac{N\pi}{c} x \right\} \\ &= G\tau c^2 \sum_{q=1}^N B_q \sin \frac{q\pi}{c} x. \end{aligned}$$

これ等の未知係数は A に N 個、 B に N 個合計 $2N$ 個である。仍つて $\psi_I, \psi_{II}, \psi_{III}$ もやはり $2N$ 個の未知数を含んで表はされる。

$$\begin{aligned} \psi_I &= G\tau y(d-y) + G\tau c^2 \sum_{n=1}^N A_n \frac{\sinh \frac{n\pi}{d}(a-x)}{\sinh \frac{n\pi}{d}(a-c)} \sin \frac{n\pi}{d} y \\ &\quad + \frac{4G\tau d^2}{\pi^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{((-1)^n - 1)}{n^3} \frac{\sinh \frac{n\pi}{d}(a-x) + \sinh \frac{n\pi}{d}(x-a)}{\sinh \frac{n\pi}{d}(a-c)} \sin \frac{n\pi}{d} y, \\ \psi_{II} &= G\tau y(d-y) + G\tau c^2 \sum_{n=1}^N A_n \frac{\sinh \frac{n\pi}{d} x}{\sinh \frac{n\pi}{d} c} \sin \frac{n\pi}{d} y + G\tau c^2 \sum_{n=1}^N B_n \sin \frac{n\pi}{c} x \frac{\sinh \frac{n\pi}{c} y}{\sinh \frac{n\pi}{c} d} \\ &\quad + \frac{4G\tau d^2}{\pi^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{((-1)^n - 1)}{n^3} \frac{\sinh \frac{n\pi}{d}(c-x) + \sinh \frac{n\pi}{d} x}{\sinh \frac{n\pi}{d} c} \sin \frac{n\pi}{d} y, \\ \psi_{III} &= G\tau (y-d)(b-y) \\ &\quad + \frac{4G\tau (b-d)^2}{\pi^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{((-1)^n - 1)}{n^3} \frac{\sinh \frac{n\pi}{b-d}(c-x) + \sinh \frac{n\pi}{b-d} x}{\sinh \frac{n\pi}{b-d} c} \sin \frac{n\pi}{b-d} (y-d) \\ &\quad + G\tau c^2 \sum_{n=1}^N B_n \sin \frac{n\pi}{c} x \frac{\sinh \frac{n\pi}{c} (b-y)}{\sinh \frac{n\pi}{c} (b-d)}. \end{aligned}$$

これ等 $2N$ 個の未知係数は接合面 FC 及 GC に於ける ψ の連続性条件から $2N$ 個の聯立方程式を立て、その根を求めて決められる。

即ち先づ I と II との接合面 FC を $(N+1)$ 等分し、 F 点即ち $y=0$ より等距離 $d/(N+1)$ の N 個の分岐点 $y_1, y_2, \dots, y_s, \dots, y_N$ を取る。それ等の各点で (第 3 圖)、

$$\left(\frac{\partial \psi_I}{\partial x} \right)_{\substack{x=c \\ y=y_s}} = \left(\frac{\partial \psi_{II}}{\partial x} \right)_{\substack{x=c \\ y=y_s}}, \quad \text{但し } y_s = \frac{sd}{N+1} \quad (s=1, 2, \dots, N)$$

を立てると A_p ($p=1, 2, \dots, N$), B_q ($q=1, 2, \dots, N$) を未知数とした N 個の聯立一次方程式が出来る。

同様に II と III との接合面 GC を $(N+1)$ 等分し、 G 点即ち $x=0$ より等距離 $c/(N+1)$ の N 個の分岐点、 $x_1, x_2, \dots, x_s, \dots, x_N$ を取り、各点で

第 3 圖

昭和 7 年 10 月]

$$\left(\frac{\partial\phi_{II}}{\partial y}\right)_{y=d}^{y=d} = \left(\frac{\partial\phi_{III}}{\partial y}\right)_{y=d}^{y=d} \quad \text{但し } x_s = \frac{sd}{N+1} \quad (s=1, 2, \dots, N)$$

を立てると、こゝに亦 N 個の聯立一次方程式が出来る。かくして得た前後合計 $2N$ 個の聯立一次方程式を解き A_p ($p=1, 2, \dots, N$), B_q ($q=1, 2, \dots, N$) が決められる。

尚ほ分岐点 $y_1, y_2, \dots, y_s, \dots; x_1, x_2, \dots, x_s, \dots$ は次節 4. にも見る様に必ずしも等距離の必要はない。

(i) 接合面 FC

$$\begin{aligned} y=y_s \text{ 點に於ける連續性の式は } & \left(\frac{\partial\phi_I}{\partial x}\right)_{y=y_s}^{y=d} = \left(\frac{\partial\phi_{II}}{\partial x}\right)_{y=y_s}^{y=d} \quad \text{これを計算すると} \\ & -G\tau c^2 \frac{\pi}{d} \sum_{n=1}^N n A_n \coth \frac{n\pi}{d} (a-c) \sin \frac{n\pi}{d} y_s \\ & + \frac{4G\tau d}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{((-1)^n - 1)}{n^2} \left(\operatorname{cosech} \frac{n\pi}{d} (a-c) - \coth \frac{n\pi}{d} (a-c) \right) \sin \frac{n\pi}{d} y_s \\ & = G\tau c^2 \frac{\pi}{d} \sum_{n=1}^N n A_n \coth \frac{n\pi}{d} c \sin \frac{n\pi}{d} y_s + G\tau c^2 \frac{\pi}{c} \sum_{n=1}^N (-1)^n n B_n \frac{\sinh \frac{n\pi}{c} y_s}{\sinh \frac{n\pi}{c} d} \\ & + \frac{4G\tau d}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{((-1)^n - 1)}{n^2} \left(\sinh \frac{n\pi}{d} c - \operatorname{cosech} \frac{n\pi}{d} c \right) \sin \frac{n\pi}{d} y_s. \end{aligned}$$

これを A_p ($p=1, 2, \dots, N$), B_q ($q=1, 2, \dots, N$) に就き整理すれば

$$\begin{aligned} & \frac{c}{d} \pi \left\{ \left(\coth \frac{\pi}{d} (a-c) + \coth \frac{\pi}{d} c \right) \sin \frac{\pi}{d} y_s \right\} A_1 \\ & \quad + \frac{c}{d} \pi \left\{ 2 \left(\coth \frac{2\pi}{d} (a-c) + \coth \frac{2\pi}{d} c \right) \sin \frac{2\pi}{d} y_s \right\} A_2 \\ & \quad + \dots + \frac{c}{d} \pi \left\{ n \left(\coth \frac{n\pi}{d} (a-c) + \coth \frac{n\pi}{d} c \right) \sin \frac{n\pi}{d} y_s \right\} A_n \\ & \quad + \dots + \frac{c}{d} \pi \left\{ N \left(\coth \frac{N\pi}{d} (a-c) + \coth \frac{N\pi}{d} c \right) \sin \frac{N\pi}{d} y_s \right\} A_N \\ & - \pi \left\{ \frac{\sinh \frac{\pi}{c} y_s}{\sinh \frac{\pi}{c} d} \right\} B_1 + \pi \left\{ 2 \frac{\sinh \frac{2\pi}{c} y_s}{\sinh \frac{2\pi}{c} d} \right\} B_2 - \dots + (-1)^n \pi \left\{ n \frac{\sinh \frac{n\pi}{c} y_s}{\sinh \frac{n\pi}{c} d} \right\} B_n \\ & \quad \pm \dots + (-1)^N \pi \left\{ N \frac{\sinh \frac{N\pi}{c} y_s}{\sinh \frac{N\pi}{c} d} \right\} B_N \\ & + \frac{4}{\pi^2} \frac{d}{c} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{((-1)^n - 1)}{n^2} \left(\coth \frac{n\pi}{d} c - \operatorname{cosech} \frac{n\pi}{d} c - \operatorname{cosech} \frac{n\pi}{d} (a-c) \right. \\ & \quad \left. + \coth \frac{n\pi}{d} (a-c) \right) \sin \frac{n\pi}{d} y_s = 0, \quad \text{但し } y_s = \frac{sd}{N+1}. \end{aligned}$$

この方程式で順次に $y_s = y_1, y_2, \dots, y_N$ と置けば A_p ($p=1, 2, \dots, N$), B_q ($q=1, 2, \dots, N$) に関する N 個の聯立一次方程式を得る。

(ii) 接合面 GC

$$\begin{aligned} x=x_s \text{ 點に於ける連續性の式は } & \left(\frac{\partial\phi_{II}}{\partial y}\right)_{x=x_s}^{y=d} = \left(\frac{\partial\phi_{III}}{\partial y}\right)_{x=x_s}^{y=d} \quad \text{ことを計算すると} \\ & -G\tau d + G\tau c^2 \frac{\pi}{d} \sum_{n=1}^N (-1)^n n \frac{\sinh \frac{n\pi}{d} x_s}{\sinh \frac{n\pi}{d} c} A_n + G\tau c^2 \frac{\pi}{c} \sum_{n=1}^M n \coth \frac{n\pi}{c} d \sin \frac{n\pi}{c} x_s B_n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= G\tau(b-d) + \frac{4G\tau(b-d)}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{((-1)^n - 1)}{n^2} \frac{\sinh \frac{n\pi}{b-d}(c-x_s) + \sinh \frac{n\pi}{b-d}x_s}{\sinh \frac{n\pi}{b-d}} \\
&- G\tau c^2 \frac{\pi}{c} \sum_{n=1}^N n \coth \frac{n\pi}{c}(b-d) \sin \frac{n\pi}{c} x_s B_n.
\end{aligned}$$

これを A_p ($p = 1, 2, \dots, N$), B_q ($q = 1, 2, \dots, N$) に就き整理すると

$$\begin{aligned}
&-\frac{c}{d} \pi \left\{ \frac{\sinh \frac{\pi}{d} x_s}{\sinh \frac{\pi}{d} c} \right\} A_1 + \frac{c}{d} \pi \left\{ 2 \frac{\sinh \frac{2\pi}{d} x_s}{\sinh \frac{2\pi}{d} c} \right\} A_2 - \dots + (-1)^N \frac{c}{d} \pi \left\{ n \frac{\sinh \frac{n\pi}{d} x_s}{\sinh \frac{n\pi}{d} c} \right\} A_n \\
&\pm + (-1)^N \frac{c}{d} \pi \left\{ N \frac{\sinh \frac{N\pi}{d} x_s}{\sinh \frac{N\pi}{d} c} \right\} A_N + \pi \left\{ \left(\coth \frac{\pi}{c} d + \coth \frac{\pi}{c} (b-d) \right) \sin \frac{\pi}{c} x_s \right\} B_1 \\
&+ \pi \left\{ 2 \left(\coth \frac{2\pi}{c} d + \coth \frac{2\pi}{c} (b-d) \right) \sin \frac{2\pi}{c} x_s \right\} B_2 \\
&+ \dots + \pi \left\{ n \left(\coth \frac{n\pi}{c} d + \coth \frac{n\pi}{c} (b-d) \right) \sin \frac{n\pi}{c} x_s \right\} B_n \\
&+ \dots + \pi \left\{ N \left(\coth \frac{N\pi}{c} d + \coth \frac{N\pi}{c} (b-d) \right) \sin \frac{N\pi}{c} x_s \right\} B_N \\
&+ \frac{4}{\pi^2} \frac{d}{c} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{((-1)^n - 1)}{n^2} (-1)^n \frac{\sinh \frac{n\pi}{d}(c-x_s) + \sinh \frac{n\pi}{d}x_s}{\sinh \frac{n\pi}{d}c} \\
&- \frac{4}{\pi^2} \frac{(b-d)}{c} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{((-1)^n - 1)}{n^2} \frac{\sinh \frac{n\pi}{b-d}(c-x_s) + \sinh \frac{n\pi}{b-d}x_s}{\sinh \frac{n\pi}{b-d}c} - \frac{b}{c} = 0,
\end{aligned}$$

$$\text{但し } x_s = \frac{sc}{N+1}.$$

この方程式で順次に $x_s = x_1, x_2, \dots, x_N$ と置けば、 A_p ($p = 1, 2, \dots, N$), B_q ($q = 1, 2, \dots, N$) に関する他の N 個の聯立一次方程式が得られる。

かくして得た前後 $2N$ 個の聯立一次方程式より A_p ($p = 1, 2, \dots, N$), B_q ($q = 1, 2, \dots, N$) を知り、従つて $f(y)$ 及 $\varphi(x)$ が級数の形で決定され問題は完全に解ける。 $f(y)$ 及 $\varphi(x)$ には餘り多くの項を必要としない。

4. 例 題

第4圖に示す如き不等邊不等厚山形断面材に就き 2. 及 3. の結果を用ひて、振り應力線、應力分布等を計算した。断面形は次の比例を持つ。

$$\text{邊の長さ } a = 4c, \quad b = 5c$$

$$\text{邊の厚さ } d = 2c, \quad c = c$$

便宜上断面内の點の位置を示す爲に、圖の如き網目を作る。例へば C 點は 5.5, B 點は 9.5 の如くにして表はさ

れる。 $f(y)$ 及 $\varphi(x)$ は、次の如く

$$f(y) = G\tau c^2 \left\{ A_1 \sin \frac{\pi}{d} y + A_2 \sin \frac{2\pi}{d} y \right\},$$

$$\varphi(x) = G\tau c^2 \left\{ B_1 \sin \frac{\pi}{c} x + B_2 \sin \frac{2\pi}{c} x \right\}.$$

各々は 2 項で表はすこととし、未知係数 $A_1, A_2; B_1, B_2$ の 4 個を取る。この未知係数を 3. で述べた方法から決める。即ち

昭和 7 年 10 月]

第 4 圖

計算第 1. 最初に FC 及 GC を 3 等分し、 $y_1 = d/3$, $y_2 = 2d/3$; $x_1 = c/3$, $x_2 = 2c/3$ の 4 點に於ける連続性*

第 1 表 ψ の計算表 ($G\tau c^2$ を単位として)

$$f(y) = G\tau c^2 \left\{ 0.762 \sin \frac{\pi}{d} y - 0.011 \sin \frac{2\pi}{d} y \right\}, \quad \varphi(x) = G\tau c^2 \left\{ 0.339 \sin \frac{\pi}{c} x - 0.017 \sin \frac{2\pi}{c} x \right\}$$

計算第 1

點の位置	x	1	2	3	4	5	6	7	8	9
y										
9		0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	—	—	—	—
8		0.000	0.163	0.219	0.163	0.000	—	—	—	—
7		0.000	0.182	0.242	0.182	0.000	—	—	—	—
6		0.000	0.197	0.264	0.197	0.000	—	—	—	—
5		0.000	0.223	0.339	0.257	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
4		0.000	0.292	0.470	0.547	0.550	0.672	0.663	0.520	0.000
3		0.000	0.316	0.529	0.669	0.762	0.890	0.878	0.676	0.000
2		0.000	0.244	0.398	0.490	0.528	0.670	0.663	0.520	0.000
1		0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000

*の式を計算する。(この計算式に出て来る Δ は比較的速かに収斂する。) その結果

$$\begin{cases} 284 A_1 + 545 A_2 - 4.70 B_1 + 0.145 B_2 = 209, \\ 284 A_1 - 545 A_2 - 38.7 B_1 + 9.53 B_2 = 209, \\ -37.4 A_1 + 34.0 A_2 + 544 B_1 + 1088 B_2 = 136, \\ -85.3 A_1 + 109 A_2 + 544 B_1 - 1088 B_2 = 136. \end{cases}$$

なる 4 個の聯立一次方程式を得る。この聯立一次方程式の根を求めると $A_1 = 0.762$, $A_2 = -0.011$; $B_1 = 0.339$, $B_2 = -0.017$ となり、 $f(y)$ 及 $\varphi(x)$ は次の如く確定出来る。即ち

$$f(y) = G\tau c^2 \left\{ 0.762 \sin \frac{\pi}{d} y - 0.011 \sin \frac{2\pi}{d} y \right\}$$

$$\varphi(x) = G\tau c^2 \left\{ 0.339 \sin \frac{\pi}{c} x - 0.017 \sin \frac{2\pi}{c} x \right\}.$$

$f(y)$ 及 $\varphi(x)$ はこの場合殆ど単一の sine 曲線に近い。 $f(y)$ 及 $\varphi(x)$ が解れば、2. に述べた式を用ひて各單體 I, II, III に對し ψ が計算出来る。その結果を第 1 表に示す。これを曲線で示したのが第 5, 6 圖の實線である。第 5 圖は $y = \text{const}$ の切斷面に沿へる x 方向の ψ 分布を第 6 圖は $x = \text{const}$ の切斷面の y 方向の ψ 分布を示す。これを見ると $y = 4$, 及 $x = 4$ の切斷面即内隅に近い處で、連續性が不十分なことが解る。これは、 $y_1 = d/3$, $y_2 = 2d/3$; $x_1 = c/3$, $x_2 = 2c/3$ の 4 點で接合したので、その 4 點を離れた處では連續性が不十分なのである。

計算第 2. 仍つて次の如く接合點を變へて同じ計算をして見た。即ち FC 及 GC を矢張り y'_1, y'_2 ; x'_1, x'_2 の 4 點で分割し $y'_1 = d/2$, $y'_2 = 5d/6$; $x'_1 = c/2$, $x'_2 = 5c/6$ の如く接合點を計算第 1 の時よりも多少内隅の方へずらせた。

4 點の連續性の式は、聯立一次方程式

$$\begin{cases} 328 A_1 - 13.6 B_1 + 1.2 B_2 = 239, \\ 164 A_1 - 545 A_2 - 111 B_1 + 77.4 B_2 = 175, \\ -59.3 A_1 + 62.6 A_2 + 628 B_1 = 148, \\ -117 A_1 + 186 A_2 + 314 B_1 - 1091 B_2 = 98.9. \end{cases}$$

で表はされ、これを解くと $A_1 = 0.742$, $A_2 = -0.179$; $B_1 = 0.324$, $B_2 = -0.107$ となり、 $f(y)$ 及 $\varphi(x)$ は

$$f(y) = G\tau c^2 \left\{ 0.742 \sin \frac{\pi}{d} y - 0.179 \sin \frac{2\pi}{d} y \right\}$$

$$\varphi(x) = G\tau c^2 \left\{ 0.324 \sin \frac{\pi}{c} x - 0.107 \sin \frac{2\pi}{c} x \right\}$$

となる。今度は二次の sine 曲線が相當重要になつて来る。前同様 2. の式から各點の ψ を計算すると第 2 表の如くなる。圖示したものは第 5, 6 圖の點線である。

第5圖 ψ 分布圖 $y = \text{const}$ なる切斷面に沿へる x 方向の分布

第6圖 ψ 分布圖 $x = \text{const}$ なる切斷面に沿へる y 方向の分布

計算第 1

$$\begin{aligned} f(y) &= G\tau c^2 \left\{ 0.762 \sin \frac{\pi}{d} y - 0.011 \sin \frac{2\pi}{d} y \right\} \\ \varphi(x) &= G\tau c^2 \left\{ 0.339 \sin \frac{\pi}{c} x - 0.017 \sin \frac{2\pi}{c} x \right\} \end{aligned}$$

計算第 2

$$\begin{aligned} f(y) &= G\tau c^2 \left\{ 0.742 \sin \frac{\pi}{d} y - 0.179 \sin \frac{2\pi}{d} y \right\} \\ \varphi(x) &= G\tau c^2 \left\{ 0.324 \sin \frac{\pi}{c} x - 0.107 \sin \frac{2\pi}{c} x \right\} \end{aligned}$$

N.B. ψ はすべて $G\tau c^2$ の單位にてあらはす (第5圖も同じ)

昭和7年10月]

第2表 ϕ の計算表 ($G\tau c^2$ を単位として)

$$f(y) = G\tau c^2 \left\{ 0.742 \sin \frac{\pi}{d} y - 0.179 \sin \frac{2\pi}{d} y \right\}, \quad \varphi(x) = G\tau c^2 \left\{ 0.324 \sin \frac{\pi}{c} x - 0.107 \sin \frac{2\pi}{c} x \right\}$$

計算第2

点の位置 $\begin{array}{c} x \\ y \end{array}$	1	2	3	4	5	6	7	8	9
9	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	—	—	—	—
8	0.000	0.163	0.219	0.163	0.000	—	—	—	—
7	0.000	0.182	0.241	0.182	0.000	—	—	—	—
6	0.000	0.191	0.261	0.200	0.000	—	—	—	—
5	0.000	0.122	0.324	0.336	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
4	0.000	0.296	0.495	0.616	0.704	0.684	0.663	0.519	0.000
3	0.000	0.311	0.521	0.656	0.742	0.884	0.876	0.675	0.000
2	0.000	0.228	0.359	0.404	0.346	0.650	0.660	0.519	0.000
1	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000

第7図 應用函数 ϕ 分布圖 ($G\tau c^2$ 単位として)

この時もやはり $y=2$, ($y=4$); $x=2$ の切断面で連続性が満されない。この場合は接合した4点が内隅に近い爲に内隅から離れた處、 $y=2$, $x=2$ で不連続性が著しく現れる。第5,6圖は二通りの計算を同時に表はしてゐるから接合点の位置の影響を見るに便利である。

故に、 $f(y)$ 及 $\varphi(x)$ を各2項のみの級数で表はし、4点で接ぎ合はせるのでは今の場合不十分であつて、(熱傳導問題ではこれで充分であつた) 3項或はそれ以上で表はし6点或はそれ以上の點で接合するのがよいのは明である。然しその爲には6元或はそれ以上の聯立方程式を解く必要が起り、事實上計算は大分難事となる。故に今の場合は第1,第2の二通りの計算結果の中からうまく

(4) 前出 (3) を参照。

行つてゐる範圍のみを引出し利用することにすればよい。即ち第1の計算結果は山形断面の内隅附近には不連続性が残つてゐるから、外邊附近のもののみを用ひ、第2の計算結果は外邊附近で不連続性が現れてゐるから、内邊附近のもののみを用ひ、一方のいけない所は他方のよい所で補ふと云ふ便宜法を用ひる。唯 $y=4$ の處のみは兩計算共少しづゝ不連続性を残してゐるから兩方の平均を取ることとする。こうした工夫の仕方は工學の範圍では、充分許されてよいと信ずる。かくして兩者の長所を取つて作つた ϕ の分布は第7圖に示す通りである。

1) ϕ の分布。 ϕ の分布は第7圖に示す通り全體として平滑な連續曲線で表はされる。斯くの如く $f(y)$ 及 $\varphi(x)$ を Fourier 級数の最初の2項のみで表はしたとき

も上述の様な便宜法を用ふれば接合面の連続性は殆ど完全に満し得る。

2) 捩り應力線。 $\psi = \text{常數} = \text{パラメーター}$ として ψ の同じ點をつなぐと捩り應用線圖が出来ゐる。 ψ を 0.2 ($G\tau c^2$ を單位として、以下同様) 置きに取つて畫いた捩り應力線を第 8 圖と示した。捩りモーメントによる剪應力はこの線の切線方向に働く。これを見ると薄い長い邊の影響は割合少なくて $\psi = 0.4$ よりも大きい捩り應力線は厚く短い矩形断面單獨の場合の捩り應力線に段々と近づ

いて行くことが解る。 ψ の最大値は 0.890 である。

3) 周邊に沿へる剪應力分布。前述の便宜法によつて求めた ψ を用ひて、1. の基礎式

$$S_1 = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad S_2 = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

により周邊に沿ふた剪應力を計算した。その結果は第 3. 表の如くその分布を圖示すれば、第 8 圖の如くである。但し計算に際し外周に對しては計算第 1 の ψ を用ひ、内周に對しては計算第 2 の ψ を用ひた。

第 3 表 周邊に沿へる剪應力の分布 ($G\tau c$ を單位として) (剪應力はすべて、時計の針と反對の方向に働く)

點の位置	x	1	2	3	4	5	6	7	8	9
y										
9	0.000	0.620	0.742	0.620	0.000	—	—	—	—	—
8	0.632	—	—	—	0.634	—	—	—	—	—
7	0.735	—	—	—	0.754	—	—	—	—	—
6	0.823	—	—	—	1.027	—	—	—	—	—
5	0.958	—	—	—	{ 1.690 1.728	1.870	1.810	1.489	0.000	—
4	1.414	—	—	—	—	—	—	—	—	1.210
3	1.458	—	—	—	—	—	—	—	—	1.470
2	1.196	—	—	—	—	—	—	—	—	1.210
1	0.000	0.818	1.199	1.361	1.162	1.823	1.808	1.490	0.000	—

周邊に働く剪應力は、すべて周邊に切して働きの断面内剪應力の最大値は周邊上に現はれるものである。嚴格

な理論によれば内隅 (re-entrant angle) では剪應力は無限大となるべきであつて、これを避ける爲實際は内隅は直角に曲げずに fillet を入れて或る半徑を持たせる様にしてゐる。(内隅の半徑 ρ なるときの等邊山型材の内隅點に於ける捩り剪應力に就ては E. Trefftz 及津村氏の研究がある。) 著者の計算法では、 $f(y)$ 及 $q(x)$ を表はすに、2 項の級數で満足してゐる爲、内隅に於ける剪應力は無限大とならない。又外周に沿ふても接合點に於ける剪應力は、 $\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial x}$ から計算したものはかなり小さく出て不連続になつてゐる。これも $f(y)$ 及 $q(x)$ を 2 項で表はしたからであつて、 f 及 q は値に於ては、事實に相當一致するも、その微係數迄事實と一致させるのは困難であり。従つて其他の處は上述の通りに剪應力を計算し、それで充分正確な筈である。尙附第 7 圖に示す ψ の分布圖の傾斜から圖式に求めた剪應力は連続的なつてゐる。

本例の如き比例の断面材では、厚く短い邊の周に沿ふ剪應力は、薄く長い邊の周に沿ふものよりもはるかに大きく、その最大値は 1.8 ~ 2.0 ($G\tau c$ を單位として) の程度で本體をなす矩形の長邊中央部に起る。

4) 隅を丸めた不等邊不等厚山型断面材。 $\psi = 0.05$ に相當する捩り應力線を畫くと、

第 8 圖 捩り應力線 $\psi = \text{const}$ 及び周邊に沿へる剪應力 S 並に隅を丸めた不等邊不等厚山型断面。

單位 $\begin{cases} \psi: G\tau c^2 \\ S: G\tau c \end{cases}$

(6) 前出 (2) を参照。

第 8 圖の如く隅を丸めた不等邊不等厚山型断面を得る。この断面は實際上各方面で用ひる断面形に相當してゐる。この断面形に對する捩り應力函數 ψ 及捩り應力線は前述の隅を丸めない場合のものと全く一致し、又剪應力も同様に $\frac{\partial \psi}{\partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial x}$ に各點の位置の座標を代入して計算出来る。これは捩りの弾性學の基礎より明らかで、捩りモーメントによる應力は接觸面の剪應力の外には存立しないこと、又基本微分方程式を解く際の周邊條件は $\psi = 0$ ならずとも一般に $\psi = \text{const}$ でよいことから判明する。故に上の様に求めた不等邊不等厚山形断面材に對する捩り應力の解法は同時に隅を丸めた不等邊不等厚山形断面材の解法ともなる。

5. 總 括

本論文は不等邊不等厚山型断面材の捩り應力の問題を著者考案の“接合法”で解決し、實際方法を例題で示したものである。“接合法”とは捩りの基礎式 $\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = -2G\tau$ (ψ は應力函數) を周邊條件 $\psi = 0$ の下に解くに當り問題の断面を三つの矩形單體に分離し、その境界面に沿ふて $\psi = f(y)$ 及 $\psi = \varphi(x)$ を假定して、先づ各單體に對する解を求め、後にこれを接ぎ合せて断面全體の解を得る方法である。假定函數 $f(y)$ 及 $\varphi(x)$ は接合面に於ける ψ の連續性の條件より決定する。

これを實際問題にあてはめるに當つては次の事項に注意せねばならぬ。即ち $f(y)$ 及 $\varphi(x)$ は Fourier の sine 級數で表はし、この級數の係數を接合面に於ける ψ の連續性を利用して定めるのが最も適當である。實際計算で級數の多數項をとることは不可能なる故 2 或は 3 項で満足せねばならぬ。4. の例題の如く 2 項をとつたときは接合面上の 4 點で接合するから、接合點以外では不連續性が残ることが多い。故に連續性を望む位置に従ひ接合點をかへて二通り位の計算をして其の兩計算中の良い部分のみをとり最後の解を作り上げると云ふ便宜法を用ひると良い。この點は「接合法」を熱傳導問題に應用した場合とはかなり異つた點であつて、傳熱問題では一通りの計算で然も Fourier 級數の最初の 1 項をとつただけでも接合面全般に亘つて連續性が得られたが、捩りの問題ではそれ程簡単に連續性を到達することは出来ない。

4. の例題其他より歸結される事項は次の如くである。

1) 不等邊不等厚山形断面材の薄き邊は捩り強度の點からは餘り大切ではない。この邊が相當薄ければ主體なる矩形單獨の捩れ強度と餘り違はぬであらう。それは捩

り應力線は薄き邊の爲に大した影響を受けないこと、及び薄き邊の周邊に沿へる剪應力は主體たる矩形断面の周邊に沿へる剪應力の殆ど 1/2 であることを見れば自ら判明する。然してその最大捩り應力は内隅の點をのぞけば本體たる矩形の長邊中央部に起る。

2) 隅を丸めた不等邊不等厚山型断面材の捩り應力は隅を丸めない断面材に對する應力函數 ψ より計算することが出来るから、上來の解法は同時に隅を丸めた断面材に對する解法を與へる。

3) 捩りの問題は流體力學及薄膜の理論と共通點を多數に持つて居り、不等邊不等厚山型断面材に對して求めた捩り應力の解法はかゝる断面形内に於ける理想流體の運動、並びに同じ外形の薄膜に等齋圧が加はつた時の變位の問題を解決してゐる。即ち 4. に於ける應力函數 ψ の分布は薄膜問題に於ける變位量を或るスケールで表はしたものであり、 $\psi = \text{const}$ の捩り應力線は水流問題に於ける流線及び薄膜の問題に於ける變位の contour lines を與へ、又各點に於ける剪應力は水流問題に於ける各相當點の流速を與へてゐる。

第 9 圖

かくの如く、“接合法”は不連續部分の困難を含む熱傳導問題及び捩り應力問題の一解法として廣く應用し得る。捩り應力問題の解法の應用例を示せば第 9 圖に示す處の 1, 2, 3, 4, 5 等の不等邊不等厚の $\perp$, $\square$, Z , U , I 型断面材 (一般に Walzeisenprofil と稱するもの)⁽⁶⁾ は全く同様の手順で解決さる。又 6, 7 の如き断面材に對しても同様に近似解が得られる。

尚ほこの“接合法”は他の方面の理論にも應用し得ることは明かで追々研究の進むにつれて、發表し得るであらう。

以上

横濱高工造船工學科航空學教室

(6) C. Schmieden は Z.A.M.M., 1930 に於て、邊の長さが ∞ なる $\perp$, L , U , Z 型断面材の捩り問題に就て發表してゐる。