— 研 究 速 報 —

熱 良 導 流 體 容 器 の 熱 傳 導

(昭和 9 年 11 月 10 日 應用力学講演會に於て講演)

准 員 工 学 士 中 田 孝⁽¹⁾

On Cooling of Vessel Containing Fluid of High Thermal Conductivity

By Takasi NAKATA, Kôgakusi, Associate Member

1. 緒 言

高温度の熱良導体(熱傳率無限大)を容器に入れた時、熱は容器の外圍から大氣中に放散されて流體の温度は時間と共に次第に降下する。筆者は次の假定の下に以上の問題を一次元的及び無限長中空円筒に就て記號解法に依つて解いた。

1. 容器内の流體は何處でも一樣の温度分布状態即ち熱傳導率が無限大であると假定す。
2. 流體と、それが接する容器内壁表面との間の熱傳達は Newton 法則に従ふ(流體と壁との間の熱抵抗無き時はこれより直に出せる。)
3. 容器の外圍の熱傳達は Newton 法則に従ふ。
4. 容器の壁の中は $\alpha \Delta^2 \theta = \partial \theta / \partial t$ が成立つ。
5. 初の壁中の温度分布状態(壁面法線方向の)が與へられて居る。

内容的熱傳導率が無限大なる時以上の條件を満足する直交函数を得る事困難にして、直に初の壁温度分布函数を普通の如く微分方程式の解にて展開する事が出来ない。西村源六郎氏⁽²⁾はこの様な場合に内容物の熱容量が容器の熱容量に較べて非常に小さい時巧妙な方法により直交函数を使用して解を出されて居る。又最近 A. L. Lowan 氏⁽³⁾は同様の問題を負荷直交(ローデット・オーソゴナル)の方法により解かれて居る。筆者は本問題の總ての條件を満足する解を Heaviside 記號解法にて求めた。

2. 記 號

t = 時間

θ = 流體の温度 (外氣の温度を零に取る)

θ_0 = 流體の初の温度 (")

θ = 容器壁中の温度 (")

c = 流體の單位容積の熱容量

c_0 = 容器壁の單位容積の熱容量

x = 容器内壁より外に向つて測つた距離

l = 容器壁の厚さ

r = 円筒の中心より測つた半径

r_1, r_2 = 円筒の内、外径

k = 壁の熱傳導率, $a = k/c_0$ = 壁の熱擴散率

a_1, a_2 = 壁の内、外表面の熱傳達係數

F = 容器内壁の冷却を受ける面積

V = 流體の容積

$h_1 = a_1/k, h_2 = a_2/k, s = (Fc_0)/(Vc) \dots \dots$ (一次元の場合)
 $= (2c_0)/(cr_1) \dots \dots$ (円筒の場合)

$\mu = (Fa_1)/(Vc) \dots \dots$ (一次元の場合)

$= (2a_1)/(r_1c) \dots \dots$ (円筒の場合)

3. 一次元の問題

壁の厚さ一樣な容器の冷却面の曲率が壁の厚さに較べて相當大なる時は以上の問題は一次元として考へられる。今 x 軸を内壁に直角に外向きに取り原點を内壁面に置く。内壁に吸收される熱量に相當して流體の温度が降るとすれば

$$d\theta/dt = -\{(Fa_1)/(Vc)\} \cdot (\theta - \theta_{x=0}) \dots \dots (1)$$

が成立ち、又内壁面にて

$$(\partial \theta / \partial x)_{x=0} = -h_1(\theta - \theta_{x=0}) \dots \dots (2)$$

の関係あるため (1) と (2) より

$$(\partial \theta / \partial x)_{x=0} = -h_1 \left\{ \exp(-\mu t) (\theta_0 + \mu \int_0^t \theta_{x=0}(\tau) \exp(\mu \tau) d\tau) - \theta_{x=0} \right\} \dots \dots (3)$$

[第 38 卷 第 213 號]

(1) 東京工業大学機械工学科助手 (工作實驗室)

(2) 西村氏: 密閉爆發器に於る火藥燃燒瓦斯の熱損失算定法、第一回應用力学大會論文集熱力学熱傳導學篇

(3) A. L. Lowan 氏: Heat Conduction in a Solid in Contact with a well-stirred Liquid, Camb. Phil. Mag. p. 849, 1934 年

が得られる。従つて微分方程式及び満足すべき境界条件は

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial\theta/\partial t = a\partial^2\theta/\partial x^2 \dots\dots\dots(4) \\ \text{境界条件} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x=0: (\partial\theta/\partial x)_{x=0} = -h_1 \left\{ \exp(-\mu t) (\theta_0 \right. \\ \left. + \mu \int_0^t \theta_{x=0}(\tau) \exp(\mu\tau) d\tau \right\} - \theta_{x=0} \dots\dots\dots(3) \\ x=l: (\partial\theta/\partial x)_{x=l} = -h_2 \theta_{x=l} \dots\dots\dots(5) \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{初条件} \\ t=0: \theta=f(x)\theta_0 \dots\dots\dots(6) \end{array} \right.$$

これを Heaviside 記號法に書き直すと

$$\left\{ \begin{array}{l} d^2\theta/dx^2 - (p/a)\theta = -(p/a)f(x)\theta_0 \dots\dots\dots(7) \\ x=0: (d\theta/dx)_{x=0} + h_1 \{ p/(p+\mu) \} (\theta_0 - \theta_{x=0}) = 0 \dots\dots\dots(8) \\ x=l: (d\theta/dx)_{x=l} + h_2 \theta_{x=l} = 0 \dots\dots\dots(9) \end{array} \right.$$

但し p は微分記號であつて $\partial^n/\partial t^n = p^n$, $\int_0^t \dots \int_0^t (d\tau)^n = 1/p^n$ の関係がある (積分は凡て $\tau=0$ より $\tau=t$ まで行ふ)。(7) 式で p を常數の如く考へ x に就て解き (8) (9) が満足される様に不定常數を決め、次式に示す展開式⁽⁵⁾にて記號式を普通の式に直す。

$$f(p)/F(p) = f(0)/F(0) + \sum_{n=1,2,\dots} f(p_n) \exp(p_n t) / p_n F'(p_n) \dots\dots\dots(10)$$

此處に F' は F を p に就て微分した物、又 p_n は $F(p)=0$ の根 (重複根で無い時)。但し $f(p)$ の p の次數が $F(p)$ のそれに等しいか又は低い時に限る。

結果は次式の様になる。

$$\begin{aligned} \theta = 2\theta_0 \sum_{n=1,2,\dots} & \left[(s - m_n^2/h_1) \cos m_n x \right. \\ & - m_n \sin m_n x \left. \right] \left[1 + \int_0^t f(\xi) \{ (s - m_n^2/h_1) \cos m_n \xi \right. \\ & - m_n \sin m_n \xi \} d\xi \right] \exp(-a m_n^2 t) \div \left[\left\{ L(s - m_n^2/h_1)^2 \right. \right. \\ & + m_n^2(L+1/h_1) \} + \{ h_2/(m_n^2 + h_2^2) \} \{ (s - m_n^2/h_1)^2 \\ & + m_n^2 \} + s \left. \right] \dots\dots\dots(11) \end{aligned}$$

又流體の温度は

$$\begin{aligned} \theta = 2\theta_0 \sum_{n=1,2,\dots} & \left[1 + \int_0^t f(\xi) \{ (s - m_n^2/h_1) \cos m_n \xi \right. \\ & - m_n \sin m_n \xi \} d\xi \right] \exp(-a m_n^2 t) \div \left[\left\{ L(s - m_n^2/h_1)^2 \right. \right. \\ & + m_n^2(L+1/h_1) \} + \{ h_2/(m_n^2 + h_2^2) \} \{ (s - m_n^2/h_1)^2 \\ & + m_n^2 \} + s \left. \right] \dots\dots\dots(12) \end{aligned}$$

但し m_n は

$$\tan m_n l = \{ (sh_2/m_n) - (1 + h_2/h_1)m_n \} / (s + h_2 - m_n^2/h_1) \dots\dots\dots(13)$$

の正根を使用する。

4. 無限長中空円筒の問題

これは軸方向に斷面の形が變らない中空円筒の中に高温流體を入れた場合で條件は前問題と同様のものである。

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial\theta/\partial t = a(\partial^2/\partial r^2 + 1/r \cdot \partial/\partial r)\theta \dots\dots\dots(14) \\ \text{境界条件} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} r=r_1: (\partial\theta/\partial r)_{r_1} = -h_1 \left\{ \exp(-\mu t) (\theta_0 \right. \\ \left. + \mu \int_0^t \theta_{r_1}(\tau) \exp(\mu\tau) d\tau \right\} - \theta_{r_1} \dots\dots\dots(15) \\ r=r_2: (\partial\theta/\partial r)_{r_2} = -h_2 \theta_{r_2} \dots\dots\dots(16) \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{初条件} \\ t=0: \theta=f(r)\theta_0 \dots\dots\dots(17) \end{array} \right.$$

前と同様の方法にて解けば次の様になる。

$$\begin{aligned} \theta = 2\theta_0 \sum_{n=1,2,\dots} & U_0(m_n r) \left[1 + (s - m_n^2/h_1) / \{ r_1 U_0(m_n r_1) \} \right. \\ & \times \left. \int_{r_1}^{r_2} \xi f(\xi) U_0(m_n \xi) d\xi \right] \exp(-a m_n^2 t) \\ & \div \left[\{ (2s - r_1 m_n^2) / (s - m_n^2/h_1) - r_1 (s - m_n^2/h_1) \} U_0(m_n r_1) \right. \\ & + (4/\pi^2) (s/m_n^2 - 1/h_1) (1 + h_2^2/m_n^2) / \{ r_1 U_0(m_n r_1) \} \left. \right] \dots\dots\dots(18) \end{aligned}$$

又流體の温度は

$$\begin{aligned} \theta = 2\theta_0 \sum_{n=1,2,\dots} & \left[\{ 1 - m_n^2 / (m_n^2 - sh_1) \} U_0(m_n r_1) \right. \\ & + (s/r_1) \int_{r_1}^{r_2} \xi f(\xi) U_0(m_n \xi) d\xi \left. \right] \exp(-a m_n^2 t) \\ & \div \left[\{ (2s - r_1 m_n^2) / (s - m_n^2/h_1) - r_1 (s - m_n^2/h_1) \} U_0(m_n r_1) \right. \\ & + (4/\pi^2) (s/m_n^2 - 1/h_1) (1 + h_2^2/m_n^2) / \{ r_1 U_0(m_n r_1) \} \left. \right] \dots\dots\dots(19) \end{aligned}$$

$$\text{但し } U_0(m_n r) = J_0(m_n r) \{ (h_2/m_n) Y_0(m_n r_2) - Y_1(m_n r_2) \} \\ - Y_0(m_n r) \{ (h_2/m_n) J_0(m_n r_2) - J_1(m_n r_2) \} \dots\dots\dots(20)$$

$$U_1(m_n r) = J_1(m_n r) \{ (h_2/m_n) Y_0(m_n r_2) - Y_1(m_n r_2) \} \\ - Y_1(m_n r) \{ (h_2/m_n) J_0(m_n r_2) - J_1(m_n r_2) \} \dots\dots\dots(21)$$

又 m_n には次式の正根を使ふ。

$$U_0(m_n r_1) - (s/m_n - m_n/h_1) U_1(m_n r_1) = 0 \dots\dots\dots(22)$$

上式に使用したベッセル函數の記號は Watson の書に依るものである。

以上の式は一般式であるが容器内壁表面の熱抵抗が無い場合には h_1 中の a_1 を無限大と置けば良い。又根 m_n を求めるには圖式解法或はノモグラムが便利で高次のものは Whittaker⁽⁶⁾ の方法が良いと思ふ。

⁽⁴⁾ H. Jeffreys: Operational Method in Math. Phys. No. 23, Camb. Tracts p. 51.

⁽⁵⁾ 同上 p. 11.

⁽⁶⁾ Whittaker & Robinson: The Calculus of Observation 2nd Edition p. 120.