つ事が非常に重要である。又材料の弾性係數も温度によつて變化するから常に或る範圍内の温度に於て實驗し而も實驗中の温度變化も或る範圍内に止る様にしなければならぬ。円板の軸方向の振動は顯微鏡寫眞の焦點を合はなくするから寫眞の不鮮銳なものを除外すればよい。又回転火花開閉器の發火點の誤差は開閉器の間隙に飛ぶ火花の形を注意しその位置の悪かつたものを除外する。従つて誤差として入るものは円板製作上の寸法の誤差及び顯微鏡寫眞裝置の振動等であつて、

これは實驗の回數を多くして出来るだけ影響を少くした。回転數の測定は電燈線の 50 サイクルを正しいものとすれば誤差を 1% 以内にすることは容易である。

終りにこの實驗は栖原先生の御親切な御指導、機械科教室の諸先生から特に色々の便宜をお與へ下さつ事及び日本學術振興會の研究補助によつて完成された事を著者は深く感謝する次第である。

多角形の切斷面を有する梁の撓みに就て (等角寫像を用ひて解く)

(昭和 9 年 11 月 10 日 應用力学講演會に於て講演)

正員 津村 利 光⁽¹⁾

The Bending of a Beam by Terminal Transverse Load, whose Cross-section is bounded by a Polygon, using a Method of Conformal Representation.

By Toshimitsu TSUMURA, Member

1. 緒 言

§1 切斷面一様の眞直片持梁の一端に荷重が加はる際に生ずる内力を計算するに必要な撓み函数(χ)を求める一般式は既に解かれてゐる。⁽²⁾ 只多角形で圍まれた切斷面の梁に應用して χ を求める場合は比較的困難を伴ふためか餘り多く解かれてないやうである。著者の知る範圍では切斷面が矩形⁽³⁾ 2 等邊 3 角形の或るもの⁽⁴⁾

及び直角 2 等邊 3 角形⁽⁵⁾ の場合のみである。仍つて著者は上記表題の問題を等角寫像を用ひて解く方法を考へ、これの一例題として正 3 角形の切斷面の梁に應用した。尙この際生ずる内力を 2 種類とし、第 1 を垂直内力とし第 2 を剪斷内力とする。前者は容易に得られるから茲には特にこれの解法を求めず只後者の剪斷内力についてのみに記す。

第 1 圖 片持梁の圖

を通り荷重の點に向ひ、 x, y 兩軸は梁の切斷面慣性モーメントの兩主軸とし且原點は切斷面の重心を通るとする。而してこの場合には X_x, X_y, Y_y が消えて Z_x, X_x, Y_x のみが残り Z_x は次の式で求められる。

$$Z_x = -W(l-z)x/I \quad \dots\dots\dots(1)$$

但し I は y 軸についての慣性モーメントで $I = \int \int x^2 dx dy$

である。 X_x 及び Y_x を求めるには χ なる函数を使用しこれより適當の處理によつて兩内力が得られる。その條件として

$$\frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \chi}{\partial y^2} = 0 \quad \dots\dots\dots(2)$$

$$\frac{\partial \chi}{\partial \nu} = -\left\{ \frac{1}{2} \sigma x^2 + \left(1 - \frac{1}{2} \sigma\right) y^2 \right\} \cos(x, \nu) - (2 + \sigma) xy \cos(y, \nu) \quad \dots\dots\dots(3)$$

2. 一般解法

§2 第 1 圖の如く切斷面一様の眞直片接梁の一端に荷重 W が x 軸の正の方向に加はり、 z 軸は固定端より斷面重心

の 2 式を満足せねばならぬ。但し ν は切斷面周の外向き垂直線である。換言すれば χ は平面調和函数で且切斷面の周で (3) の條件を満足すればよい。茲に $x+iy$ の函数をとればその實部又は虚部は常に (2) を満足するからかゝる實部又は虚部を χ とおけば χ は (3) のみを満足すればよい事になる。仍つて

(1) 東京府立化学工業学校嘱託 (2) Love: Elasticity, 版 4, 頁 329 以下。 (3) 同上頁 337。 (4) S. Timoshenko: London Math. Soc. Proc. (Ser. 2), Vol. 20, 1922 p. 398. (5) 竹田男 本誌 昭和 8 年 12 月 頁 848.

$$\left. \begin{aligned} \omega + i\chi &= f(x+iy), \quad p+iq = df/d(x+iy) \\ s+it &= d^2f/d(x+iy)^2, \quad u+iv = d^3f/d(x+iy)^3 \end{aligned} \right\} \dots (4)$$

とおき且境の条件式 (3) を p, q で置換へ更にこの式を多角形の周に沿つて微分すると

$$\left. \begin{aligned} q \sin \varepsilon - p \cos \varepsilon &= -\left\{ \frac{1}{2} \sigma x^2 + \left(1 - \frac{1}{2} \sigma\right) y^2 \right\} \sin \varepsilon \\ &\quad + (2 + \sigma) xy \cos \varepsilon \\ t \sin 2\varepsilon - s \cos 2\varepsilon &= x \sin 2\varepsilon + y(4 \cos^2 \varepsilon - 2 + \sigma) \\ v \sin 3\varepsilon - u \cos 3\varepsilon &= \sin \varepsilon \{ (4 + \sigma) \cos^2 \varepsilon - (2 - \sigma) \sin^2 \varepsilon \} \end{aligned} \right\} (5)$$

第 2 圖

となり (5) は總て切斷面外周の多角形邊上で成立する。 ε とは多角形の或る 1 邊が x 軸の正の方向となす角である。而して (5) の第 3 式は $u+iv$ 面で直線の方程式を表はし、原點よりこの直線に下した垂線と u 軸の負の方向となす角を 3ε とす。即ち $u+iv$ 面の多角形の内角 β_{ν} は次式で表はされる。

$$\beta_{\nu} = (m_{\nu} - 3K_{\nu})\pi \dots (6)$$

但し m_{ν} は整数にして K_{ν} は $x+iy$ 面の多角形の内角を π で割つた商で 0 と 2 との間にある。而して $x+iy$ 面の多角形即ち切斷面を Schwarz の式によつて ζ 上半面に寫像し、 $u+iv$ 面の多角形をも ζ 上半面に寫像し、且兩面の頂點に對應する點が ζ 實軸上で相一致するやうにする。このために次式を用ふ。

$$\left. \begin{aligned} x+iy &= c \int \frac{d\zeta}{\Pi(\zeta-\zeta_{\nu})^{1-k_{\nu}}} \\ u+iv &= \gamma \int \frac{R(\zeta)d\zeta}{\Pi(\zeta-\zeta_{\nu})^{3k_{\nu}}} \\ R(\zeta) &= a_0 + a_1\zeta + \dots + a_{3n-8}\zeta^{3n-8} \\ |\gamma| &= 1, \quad a_0, a_1, \dots, a_{3n-8} \text{ 實數} \end{aligned} \right\} \dots (7)$$

但し n は多角形の邊數とす。上式中第 1 式は既知の式であるから證明を要しない。第 2 式以下は大體下記のやうに證明出来る。先づ第 1 に多角形の各頂點で剪斷内力が非常に大きくなるかも知れないがこれによる歪エネルギーは有限である事より

$$m_{\nu} \geq 1 \dots (8)$$

第 2 に $x+iy$ 面の直線邊上の各點では内力が有限であることを利用して R の ζ の次數を (7) の如く定める。

第 3 に $\zeta_h < \zeta < \zeta_{h+1}$ の範圍を考へる。但し ζ_h 及び ζ_{h+1} は ζ 實軸上の分岐點とする。この間で (5) の第 3 式を満足させるために充分にして且必要なる條件は (7) の係數 $a_0, a_1, \dots, a_{3n-8}$ が實數である。仍つて (7) の正しい事の證明が終つた。この式中には $3n$ の實常數があつて、これを定むるに (5) の 3 式を各邊にあてはめて $3n$ 條件を得るから一般に解けることになる。

3. 正 3 角形斷面の梁への應用

荷重の方向 x 軸を重心と 1 頂點とを結ぶ直線に採ると

$$u+iv = -\frac{3}{4\pi}(1-2\sigma) \log \frac{\zeta-1}{\zeta+1} + i(2-\sigma) \dots (9)$$

$$OP = \sin \varepsilon_{\nu-1} \{ (4 + \sigma) \cos^2 \varepsilon_{\nu-1} - (2 - \sigma) \sin^2 \varepsilon_{\nu-1} \}$$

第 3 圖 $u+iv$ 面

の式を得る。但し頂點を $\zeta=0, \pm 1$ にとつた。これによつて計算すると切斷面に起る最大剪斷内力 τ_s と平均剪斷内力 f との比即ち τ_s/f は 1.66 に達す。

終りに臨みこの論文を稿するに際して、等角寫像の項は特に砂谷、樋口兩博士に御指導を受けた事を感謝します。