軸圧縮荷重を受くる薄肉平面壁「プロファイル」 柱の捩れへし折れ強度⁽¹⁾

(昭和 10 年 1 月 16 日 第 266 回講演會に於て講演)

正 員 工 学 士 倉 西 正 嗣⁽²⁾

1. 緒 言

「捩れへし折れ」と此處に名付けたのは軸圧縮荷重を受けてゐる柱が側方へ撓む事なく、或る軸の周りに捩れて荷重を支へられなくなるのを謂ふ。「プロファイル」柱でも開いた断面のものでは薄肉の場合にこの爲に破斷する事が相當に多いのであるが餘り注目されて居ない。最も簡単な山形材の場合に對しては Bryan, Timoschenko⁽³⁾ 等に依つて研究されてゐる。一般的な解法を Wagner⁽⁴⁾ が發表して居るものがあるからこれを出発點とする。又この種のへし折れを實驗したものは英國の報告⁽⁵⁾ 及び N.A.C.A. の報告⁽⁶⁾ に出て居るが系統立つたものでない。本文では Wagner の理論より進んで實用的な解を求め、又實際的の断面形状のものに對して結果を出した。柱のへし折れとして他の種類のもの、即ち「撓みへし折れ」と「壁面へし折れ」⁽⁷⁾ は必ず或る柱長では起るが捩れへし折れは必ず起るとは限らないから、この生起する條件を求める。

第 1 圖

2. 開いた断面の柱の捩れへし折れ 強度を求める解法

Wagner の結果では中心荷重の場合には次の如く與へられる。

P 軸圧縮荷重、 x 軸方向の座標、 φ 或る断面の捩れ角、 GJ_T 捩れ剛性 (Drillungssteifigkeit)、 EC_{bd} 曲げ捩れ剛性 (Biegungsverdrehungswiderstand)、 E ヤング弾性係數、 $C_{bd} = \int_F w^2 dF$, F 断面積、 $w = \int_u^x r_u \cdot du + r_n \cdot n$ であつて、 $\int_F w dF = 0$ となるやうに積分の下限を定める。 u, n 断面の中立面に沿ふ長さ及びそれに直角に中立面より計つた長さを取つた座標、 r, r_u, r_n 第 1 圖に示すもの、 $i_{sp}^2 = \frac{1}{F} \int_F r^2 dF$ とすると弾性的安定の極限は次式に示すものとなる。

$$E \cdot C_{bd} \frac{d^4 \varphi}{dx^4} + (P \cdot i_{sp}^2 - GJ_T) \frac{d^2 \varphi}{dx^2} = 0$$

この捩れは剪断中心⁽⁷⁾ (Schubmittelpunkt) の周りに起るものであつて、捩れの量が小さいから圖心の移動に依つて増加すべき「モーメント」は無視してある。この式の解として Wagner の與へてゐるのは $x=0$ 及び $x=L$ で $\varphi=0, \varphi''=0$ であつて、この場合は

$$P = \frac{1}{i_{sp}^2} \left(GJ_T + \frac{\pi^2}{L^2} E C_{bd} \right)$$

である。然し實用上はこの末端條件の場合は起り難い。それは $\varphi'=0$ は断面の反り (Wölbung) が自由と云ふことであるが、この條件を満足して中心荷重を加へることは一寸考へられないからである。それで次の 2 つの場合を解くことにする。 x の原點を柱の中央に置いて、

- 1) $x = \pm L/2$ で $\varphi=0, \varphi'=0$, 即ち固定の場合
- 2) $x = \pm L/2$ で柱の末端を盤で圧へ、盤は柱の圖心の位置で球で圧されてゐる場合、これを球末端の場合と名付ける。この 2 つの場合の解を綜合して次の形で表はすと

$$P = \frac{k_d}{i_{sp}^2} \left(GJ_T + k_m \frac{\pi^2}{L^2} E C_{bd} \right) \dots \dots \dots (2)$$

固定の場合には $k_d=1, k_m=4$, 球末端の場合には略近的に $k_m=1.12, k_d=1/(1-0.72r_0^2/i_{sp}^2)$ となる。 r_0 は圖心と剪断中心との距離である。球末端の場合は本來は $k_d=1$ で k_m は柱長に依つて異なるのであるが、これが 4 を越す場合には固定端と同じ状態でへし折れることとなる。この 4 を越えない條件は

$$\frac{GJ_T}{\pi^2 E C_{bd} L^2} < 4 \left(\frac{i_{sp}^2}{r_0^2} - 1 \right) \dots \dots \dots (3)$$

3. 開いた断面の平面壁「プロファイル」 柱の捩れへし折れ強度

以上の方法で平面壁「プロファイル」の場合に計算するに、 a を標準とする壁面の幅、 s を板厚とすると

$$R = i_{sp}^2 F = \left\{ A_R + B_R \left(\frac{s}{a} \right) + C_R \left(\frac{s}{a} \right)^2 \right\} s a^3$$

$$J_T = A_T s^3 a, \quad C_{bd} = A_C s a^5 + C_C s^3 a^3$$

となり、 $A_R, B_R, C_R, A_T, A_C, C_C$ は断面の形状で定まるものとなる。これ等を A_R で割つて 1, r_1, r_2, d_0, d_a, d_s とすると捩れへし折れ強度 P_{dk} は次式で與へられる。

(1) The Torsional Buckling Strength of Thin Plane Walled Profile Strut under Axial Compressive Load. By Masatugu KURANISI, *Kôgakushi, Member* (2) 陸軍航空本部々員陸軍技師

(3) 例へば S. Timoschenko, Einige Stabilitätsprobleme der Elastizitätstheorie, Z. f. Math. u. Physik, Bd. 58, S. 347, 1910

(4) Wagner, Verdrehung und Knickung von offenen Profilen, Festschrift "Fünfundzwanzig Jahre Technische Hochschule Danzig," S. 329, 1929. (5) Jenkin, Report on Materials of Construction used in Aircraft and Aircraft Engines, 1920, p. 70

(6) N.A.C.A. Technical Report No. 382, Elastic Instability of Members having Sections common in Aircraft Construction.

(7) A. Föppl u. L. Föppl, Drang und Zwang, S. 121-130; C. Weber, Biegung und Schub in geraden Balken, Z. A. M. M. Bd. 4, S. 334-348, 1924 等に出てゐる

昭和 10 年 3 月]

$$p_{dk} = \frac{k_d}{1+r_1\left(\frac{s}{a}\right)+r_2\left(\frac{s}{a}\right)^2} \left\{ d_0 \cdot \frac{E}{2(1+\nu)} \left(\frac{s}{a}\right)^2 + \frac{k_m \pi^2 E}{L^2} (d_a \cdot a^2 + d_s \cdot s^2) \right\} \dots\dots\dots (4)$$

これを計算した一例を示すと「 $\square$ 」型に對して d_0, d_a は第 2~3 圖に示すものとなる。 r_1, r_2 は 1 より小さい故に s/a が小さいのであるから無視出来る。又同様に普通には d_s の項が無視出来る。比例限度以上の時には E に相當彈性

第 2 圖 d_0 の値

係数を使用すれば良からう。

4. 捩れへし折れが實際に起る柱の條件

捩れへし折れが實際に起る爲には他の撓みへし折れ又は壁面へし折れ強度より小でなければならない。撓みへし折れ強度 p_{bk} は回転端として

$$p_{bk} = \frac{\pi^2 E}{L^2} i^2 = b_0 \pi^2 E \left(\frac{a}{L}\right)^2 \dots\dots\dots (5)$$

壁面へし折れ強度は壁面へし折れ安定限度と一致する場合⁽⁸⁾

$$p_{wk} = \frac{K_m E}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{s}{a}\right)^2 \dots\dots\dots (6)$$

これと (4) 式の p_{dk} と比較すると a/L の小さい時は p_{bk} が又 a/L の大きい時には p_{wk} が必ず小であり、その中間で p_{dk} が小さくなることがある。少くとも或る柱長で捩れへし折れの起る條件は r_1, r_2, d_s の項を無視すると

$$K_m > \frac{6(1-\nu)d_0}{1 - \frac{k_m d_a}{b_0}} \dots\dots\dots (7)$$

又捩れへし折れの起る範囲は

$$\left(\frac{a}{L}\right)_{\min} = \frac{d_0}{2\pi^2(1+\nu)} \left/ \left\{ \frac{b_0}{k_d} - k_m d_a \right\} \cdot \left(\frac{s}{a}\right)^2 \right. \dots\dots\dots (8)$$

(8) 著者、軸圧縮荷重を受ける薄肉平面壁「プロファイル」柱の壁面へし折れ強度、日本航空学会誌第 2 巻第 3~5 號

$$\left(\frac{a}{L}\right)_{\max} = \frac{K_m}{12(1-\nu^2)k_d} - \frac{d_0}{2(1+\nu)} \left(\frac{s}{a}\right)^2 \dots\dots\dots (9)$$

壁面へし折れ強度は「 $\square$ 」型の場合等では次の如く表はされる。

$$p_{wk} = K_1 \cdot E \cdot \left(\frac{s}{a}\right), \quad K_1 = \sqrt{\frac{K_m}{12(1-\nu^2)}} \frac{\sigma_p}{E}$$

此處で σ_p はへし折れ試験から定める比例限度である。これを (6) 式の代りに使用すると (7), (9) 式の代りに

$$K_1 > \frac{d_0}{2(1+\nu)} \left(\frac{s}{a}\right) \left/ \left\{ \frac{1}{k_d} - \frac{k_m \cdot d_a}{b_0} \right\} \right. \dots\dots\dots (7a)$$

$$\left(\frac{a}{L}\right)_{\max} = \frac{K_1 \left(\frac{s}{a}\right) - \frac{d_0}{2(1+\nu)} \left(\frac{s}{a}\right)^2}{\pi^2 k_m \cdot d_a} \dots\dots\dots (9a)$$

となる。これを計算すると撓み及び壁面へし折れ強度が同じである、この似た「 $\square$ 」型の「プロファイル」ではあるが捩れに對しては全く異つて居つて「 $\square$ 」型のものが捩れへし折れを起す機会が多いことを示して居る。

第 3 圖 d_a の値

5. 實驗結果

「 $\square$ 」型「 $\square$ 」型のものを試験し見ると「 $\square$ 」では捩れへし折れは生じないが「 $\square$ 」型では捩れへし折れを生ずるものとしての強度の計算値と實驗値とは相當よく一致又球端末としての捩れへし折れの形となつて破斷した試験片を得た。球端末で試験した山形材の結果は (2) 式で $k_d=1, k_m=2.62^2$ になることを Lundquist⁽⁹⁾ が述べて居るがこれは (3) 式の條件を満たさない範圍であるから當然 $k_m=4$ となるべきである。この差は試験の柱長の取り方に依るものと思はれる。

(9) Eugene E. Lundquist, The Compressive Strength of Duralumin Columns of Equale Angle Sections, N.A.C.A. Techn. Note No. 413, March, 1932