→ 研 究 速 報 ←

砂谷博士の撓み函数 χ_s の 1 應用に就て⁽¹⁾

(昭和 10 年 4 月 5 日 第 12 期定時總會講演會に於て講演)

正 員 津 村 利 光

1. 一 般 式

眞直で斷面一様の梁の斷面内に起る剪斷内力の在來の計算方法に對して砂谷博士は昨年新しい方法を發表された。同文には特に撓みによる内力のみと限つてないから剪斷力が必ずしも斷面の重心を通る必要もなく又振りモーメントのみ加はつても差支へがない。

併しながら茲には單に同論文中に使用の Ψ_s 及び χ_s の 2 函数内の撓み函数 χ_s のみ 1 解法を等角寫像を使つて試みる。而して同博士の表示式は次の如くである。

斷面内部では

$$(\partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2)\chi_s = 0 \quad \dots(1)$$

斷面周では

$$\left. \begin{aligned} \chi_s + \frac{1}{3}\sigma x^3 - (1+\sigma) \int_0^x y^2 dx &= \text{一定} \\ \widehat{xx} = \widehat{yy} = \widehat{xy} &= 0, \quad \widehat{zz} = yM \sin \alpha / I_x, \\ \widehat{xz} &= -\frac{F_y}{2(1+\sigma)I_x} \frac{\partial \chi_s}{\partial y}, \quad \widehat{yz} = \frac{F_y}{2(1+\sigma)I_x} \left\{ \frac{\partial \chi_s}{\partial x} + \sigma x^2 - (1+\sigma)y^2 \right\} \end{aligned} \right\} \dots(2)$$

但し上式には撓り函数より來る内力表示を特に省いてゐる。

第 1 圖の如く $F_y = F \sin \alpha \dots\dots\dots(3)$

であつて F は梁に働く剪斷力の合力で第 1 圖の如く働き、 C は重心、 ξ, η は慣性モーメントの兩主軸、 M は曲げモーメントで、中立軸 x の決定は (4) による。

$$(I_\xi/I_\eta) \cot \gamma = \tan \beta \quad \dots\dots\dots(4)$$

ξ, η は慣性モーメント主軸、 x 中立軸

I_ξ 及び I_η は夫々 ξ, η 軸に關しての慣性モーメントであつて $I_\xi = \int \eta^2 dA$ である。

さて今は斷面の周圍が曲線の場合でなく幾つかの直線で圍まれた形即ち多角形斷面への應用を試みる。その方法は既に發表したもの⁽²⁾と全然同一である。 χ_s は調和函数であるから次の如く置く事が出来る。

$$\left. \begin{aligned} \omega + i\chi_s &= f(x+iy), & p+iq &= f', \\ s+it &= f'', & u+iv &= f''' \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(5)$$

次に斷面周圍の直線と x 軸の正方向とのなす角を ϵ とし、先づ周に沿つて剪斷内力が働くけれどもこれに垂直の方向に

は内力が働かないといふ條件から (6) の第 1 式を得る。次にその式を周圍の直線の長さで微分して (6) の第 1 式を得る。第 3 に第 2 式を更に同方法で微分する。

即ち次の式を得る。

$$\left. \begin{aligned} q \cos \epsilon + p \sin \epsilon &= -\{\sigma x^2 - (1+\sigma)y^2\} \cos \epsilon \\ t \cos 2\epsilon + s \sin 2\epsilon &= \\ -2\{\sigma x - (1+\sigma)y \tan \epsilon\} \cos^2 \epsilon & \\ v \cos 3\epsilon + u \sin 3\epsilon &= \\ -2\{\sigma \cos^2 \epsilon - (1+\sigma) \sin^2 \epsilon\} \cos \epsilon & \end{aligned} \right\} \dots(6)$$

即ち $u+iv$ 面を考へると (6) の第 3 式は u の正軸と -3ϵ の角をなす直線式である。仍つて $x+iy$ 面の斷面を ζ の上半面に寫し又 $u+iv$ 面の多角形をも同じく ζ の上半面に寫像し且各頂點に對應する ζ 實軸上の點を一致さす事によつて $u+iv$ の函数を求め、これより更に $s+it, p+iq$ 従つて斷面内の内力分布をも求められる事になる。その式は次の如くである。

$$\left. \begin{aligned} x+iy &= c \int \frac{d\zeta}{\pi(\zeta-\zeta_v)^{1-k_v}}, & u+iv &= \gamma \int \frac{R(\zeta)d\zeta}{\pi(\zeta-\zeta_v)^{3k_v}} \\ R &= a_0 + a_1\zeta + \dots + a_{3n-8}\zeta^{3n-8}, & |\gamma| &= 1, \quad a_0, a_1, \dots, a_{3n-8} \text{ 實數} \end{aligned} \right\} \dots(7)$$

式中 k_v は $x+iy$ 面即ち梁の斷面をなす多角形の内面を π で割つた商で 0 と 2 との間になつてをり、 n は多角形の邊數である。 R 函数の次數は斷面周の直線部分に沿つては内力有限なる事より、その有理整函数なる事は剪斷内力による歪エネルギーは有限なる事より、係數 $a_0, a_1, \dots, a_{3n-8}$ が實數なる事は 2 分岐點間即ち 2 頂點間の直線部分を考へて (6) を満足さすに必要にして充分なる條件より導き出される。上の (7) より $p+iq$ を求めやうとすると斷面多角形の邊數の 3 倍の常數が導入せられるからこれを定めるには (6) の 3 式を各邊にあてはめればよい。

2. 應 用 の 1 例

上の方法によつて第 2 圖のやうな斷面の梁に剪斷力 F が重心 C を通つて V_1V_3 方向に働く場合の剪斷内力分布を計算してみる。但しその斷面は 2 個の正 3 角形を集めた菱形とする。仍つて V_1V_2 を連ねる直線が x 軸となる。この斷面を ζ 及び τ 上半面に夫々寫像すると次の諸點が對應する。

$$\left. \begin{array}{cccccc} \zeta & 0 & 1 & \infty & -1 & i \\ \tau & 1 & \infty & -1 & 0 & i \\ x+iy & V_4 & V_1 & V_2 & V_3 & \text{重心 } C \end{array} \right\} \dots(8)$$

(1) One Application of Dr. C. Sunatani's Flexure-function χ_s . By Tosimitu TUMURA, Member. 機械學會誌 昭和 9 年 9 月、頁 581, 原著には單に χ とするも本文には s のサフィックスを付した。

(2) 津村利光, 機械學會誌 昭和 10 年 1 月、頁 15, 又は同誌 昭和 10 年 5 月論文集に掲載の豫定。

$$Z = x + iy = C \int \frac{d\zeta}{\{\zeta^{1/3}(\zeta^2 - 1)^{2/3}\}} = \frac{C}{2^{1/3}} \int \frac{d\tau}{\{\tau^{2/3}(\tau^2 - 1)^{1/3}\}} \quad \dots (9)$$

$$C = 2^{4/3} \Gamma(5/6) / \{\Gamma(2/3)\Gamma(1/6)\} = 0.37736$$

$$\zeta = (\tau - 1)/(\tau + 1) \quad \dots (10)$$

上の寫像圖と (6) の第 3 式とを用ひ、又 C の場合 $p + iq$ 及び $u + iv$ は ζ の奇函數なる事を利用すると次式を得る。

第 2 圖 梁断面及びその寫像圖

第 3 圖 周辺に沿つての内力

$$u + iv = b_1(\zeta^2 - 1)/\zeta - i\frac{3}{4}(3 + 2\sigma) \quad \dots (12)$$

b_1 は未定の常數である。(12) 及び (6) より各頂點の値を求めると (13) 及び (14) を得る。

$$\left. \begin{aligned} (s + it)_4 &= (s + it)_2 = \infty, \\ (s + it)_1 &= -(s + it)_3 = (1 + \sigma)\sqrt{3}/2 \end{aligned} \right\} \quad \dots (13)$$

$$\left. \begin{aligned} (p + iq)_1 &= (p + iq)_3 = i\frac{3}{4}(H\sigma)_{1/4}, \quad (p + iq)_2 = (p + iq)_4 \\ &= -i\sigma/4 \end{aligned} \right\} \quad \dots (14)$$

但し上式中サフィックスは各頂點の番號とする。仍つて V_3V_4 に沿つては

$$p + iq = b_1 c^2 e^{i2\epsilon_4} \left\{ \int_{\zeta=-1}^{\zeta} \zeta^{-4/3} (\zeta^2 - 1)^{1/3} d\zeta \right\} \frac{d\zeta}{\zeta^{1/3} (\zeta^2 - 1)^{2/3}} - i\frac{1}{4}(3 + 2\sigma) \left\{ \frac{1}{2} z^2 + i\frac{\sqrt{3}}{2} z - \frac{3}{8} \right\}$$

$$-(1 + \sigma)\frac{\sqrt{3}}{2} \left(z + i\frac{\sqrt{3}}{2} \right) + i\frac{3}{4}(1 + \sigma) \quad \dots (15)$$

V_3 及び V_4 の點の $p + iq$ の値より $b_1 c^2 = -0.0482800 \dots$ (16) 中央線 V_3V_1 に沿つての剪斷内力の求め方は上と略同様であるが只 $\tau = \xi + i\eta$ 面を用ひて計算した。

以上によれば正 3 角形を縦に 2 個組合せて出來た菱形の剪斷内力はその周邊に大きく中央線に沿つては比較的小さい

第 4 圖 V_1V_3 に沿つての内力

第 5 圖 剪斷内力

而して剪斷内力を平均剪斷内力で割つた商の最大値は約 1.73 である。 f は平均剪斷内力で F を斷面積で割つた商である。

次に第 5 圖 A の如く力が働く場合には斷面は剪斷力の合力 F に對稱に出來てゐるから梁は荷重によつて振れない。又 V_2V_4 に沿つては $y\bar{z}$ が働くけれども $x\bar{z}$ 及び xy が零である。然るに第 5 圖 B の正 3 角形の重心 C_1 を通つて如何なる方向に剪斷力が働いても梁は振れない。即ち第 5 圖 B の内力分布⁽³⁾が直に A 圖の内力分布になつて C 圖にこれを示してゐる。

この稿に對し砂谷、樋口兩博士の御教示にあづかる事が多かつた。茲に深く感謝す。

(3) 前頁脚注 (2) に同じ。