模型試験によるフランシス、プロペラ 及びカプラン水車の効率推算⁽¹⁾

(昭和 12 年 4 月 4 日 第 14 期定時總會講演會に於て講演)

正 員 宮 城 音 五 郎⁽²⁾

1. 総論 模型水車の効率より実物水車の効率を定める公式は従来種々発表され使用されてゐるけれども、それ等は皆水車内の摩擦抵抗のみを考へ形状抵抗を省略してゐるために、部分荷重の効率が眞の効率よりも高過ぎ、著しい誤差を来すものである。本論文はこの 2 種の抵抗を共に考へることによつて、總ての荷重に於て通用される公式を、しかも最も簡単な形に於て導き出そうとするにある。

今実物水車の寸法は模型水車のその x 倍とし、実物水車の落差は模型試験を行つた落差の y 倍とすれば、模型試験は常に次の関係を満足するやうにこれを行ふ。但し n は回転度、 ω は角速度、而して以下各種の符号に凡て x を添附したものは実物水車の、又これを添附しないものは模型水車のそれ等を表すものとする。

$$n = (x/\sqrt{y})n_x, \quad \omega = (x/\sqrt{y})\omega_x \dots (1)$$

$$\text{従て流量 } Q \text{ の関係は } Q_x = x^2\sqrt{y}Q \dots (2)$$

さて落差を H とし、形状抵抗による落差の損失を h_e 、摩擦抵抗によるそれを h_f とすれば、効率 η は夫々

$$\eta = 1 - \frac{h_e}{H} - \frac{h_f}{H} \dots (3)$$

$$\eta_x = 1 - \frac{h_{ex}}{H_x} - \frac{h_{fx}}{H_x}$$

羽根車内を流通する流れの平均速度を $\bar{w}$ 、形状抵抗係数を ζ とすれば、

$$h_e = \zeta(\bar{w}^2/2g), \quad h_{ex} = \zeta_x(\bar{w}_x^2/2g)$$

而して空所発生による誤差を考へなければ従来幾多実験研究に照し $\zeta_x = \zeta$ であるから、 $h_{ex}/h_e = (\bar{w}_x/\bar{w})^2 = y$ であり、且 $H_x = yH$ であるから、

$$\eta_x = 1 - \frac{h_e}{H} - \frac{h_{fx}}{yH} \dots (4)$$

かくて (3), (4) の 2 式より、

$$\eta_x = \eta + \frac{h_f}{H} \left(1 - \frac{h_{fx}}{y h_f}\right) \dots (5)$$

通常流量の場合には流れは羽根に接線的であるから、全抵抗は摩擦抵抗のみと考へてよい。故にこの場合の効率を η_0 とすれば (3), (4) の 2 式から、

$$\eta_0 = 1 - h_f/H, \quad \eta_{0x} = 1 - h_{fx}/yH$$

$$\text{よつて } \eta_{0x} = 1 - (1 - \eta_0) \frac{h_{fx}}{y h_f} \dots (6)$$

従来使用されてゐる公式は皆この形式のものである。故に部分荷重の場合にそれを使用することは誤りである。

2. フランシス水車 第 1 図に於て ABC 及び DEF は通常流量 Q_0 なる時のフランシス水車羽根車内の平均流線の入口及び出口の速度三角形、 ABC' 及び DEF' は或る他の流量 Q におけるそれ等とする。但し r は半径、 c は流れの絶対速度、 w は羽根車に対するその相対速度、 v は軸心を含む平面上における流れの分速度、 α は流れの絶対角、 β は羽根の角とし、それ等に 1 を添附したのは入口、2 を添附したのは出口、更に 0 を添附したものは通常流量におけるそれ等を表すものとする。然る時はモーメント理論から

$$\omega r_1 c_{10} \cos \alpha_{10} = g \eta_0 H \dots (7)$$

これを順次変形し計算して次の結果に達する。

$$\bar{w} = \lambda \frac{v_2}{v_{20}} = \lambda \frac{v_1}{v_{10}} = \lambda \frac{Q}{Q_0} \dots (8)$$

但し $\bar{w}$ は w_1 と w_2 との平均値、 λ は次の如き値で、落差と回転度との與へられた水車には一定値である。

$$\lambda = \frac{1}{2} \left(\frac{u_1 - g \eta_0 H / u_1}{\cos \beta_1} + \frac{u_2}{\cos \beta_2} \right)$$

フランシス水車の羽根車は閉型であるから、

$$h_f = C \left(\frac{\bar{w} m}{\nu} \right)^{-\alpha} \frac{l}{m} \frac{\bar{w}^2}{2g} \dots (9)$$

但し m は羽根通路の流体平均深さ、 ν は水の動粘性係数、 l は平均流線に沿つて測つた通路の長さ、 α と C とは実験値、その内 C は、羽根車、案内羽根、外匣、水圧管、吸出管等の全部の摩擦抵抗の總額が羽根車内のそれに比例すると考へて、 C の中にその悉くを包含させてあるから、 h_f は水車全系統内の摩擦損失落差の總額を表す。故に同様に

$$h_{fx} = C_x \left(\frac{\bar{w}_x m_x}{\nu_x} \right)^{-\alpha} \frac{l_x}{m_x} \frac{\bar{w}_x^2}{2g} \dots (10)$$

模型と実物とは $C_x = C$ 、 $\bar{w}_x = \sqrt{y} \bar{w}$ 、 $m_x = x m$ 、 $l_x/m_x = l/m$ の関係があり、更に $\nu_x = \nu$ とすれば (9), (10) の 2 式から

$$\frac{h_{fx}}{h_f} = \frac{y^{1-\alpha/2}}{x^\alpha} \dots (11)$$

$$\text{故に } \eta_x = \eta + C \left(\frac{\nu}{\bar{w} m} \right)^\alpha \frac{l}{m} \frac{\bar{w}^2}{2g H} \left(1 - \frac{1}{x^\alpha y^{\alpha/2}} \right) \dots (12)$$

$$(6) \text{ 式によれば、 } \eta_{0x} = 1 - (1 - \eta_0) \frac{1}{x^\alpha y^{\alpha/2}} \dots (13)$$

然るに通常流量の場合は $Q = Q_0$ であるから、(8) 式から $\bar{w} = \lambda$ であり、且 $\eta = \eta_0$ 、 $\eta_x = \eta_{0x}$ であるから (12) 式によれば

$$\eta_{0x} = \eta_0 + C \left(\frac{\nu}{\lambda m} \right)^\alpha \frac{l}{m} \frac{\lambda^2}{2g H} \left(1 - \frac{1}{x^\alpha y^{\alpha/2}} \right)$$

[第 40 卷 第 241 号]

(1) Estimation of Efficiencies of Francis, Propeller and Kaplan Turbines by their Model Experiments. (2) Otagorô Miyagi, Member. The Tôhoku Imperial University, Sendai. 東北帝国大学。

これを (13) 式と等しと置いて $1-\eta_0$ の値を求め、それを (12) 式に代入し、更に (8) 式の関係を用ひて次の結果を得る。

$$\eta_x = \eta + (1-\eta_0) \left(\frac{Q}{Q_0} \right)^{2-\alpha} \left(1 - \frac{1}{x^\alpha y^{\alpha/2}} \right) \dots\dots\dots (14)$$

3. プロペラ 及び カプラン水車 これ等の水車は開放型であるから、羽根車の摩擦抵抗は半径の異なる翼の集合と考へねばならぬ。故にその計算に必要な摩擦力 R_f の式は $R_f = k\rho SV^2(LV/\nu)^{-\alpha} \dots\dots\dots (15)$ 但し ρ は水の密度、 S は翼片の面積、 V は摩擦速度、 L は翼片の長さ、 α と k とは実験値である。

第2図は半径 r における翼片の断面とその入口及び出口の速度三角形とを示し、 $\bar{w}$ は翼間を流通する流れの平均速度、 $\bar{\beta}$ はその傾斜角。今この翼片に上式を應用す

第 2 図

左より 第 3, 4, 5 図

るために、翼の長さを l 、その数を z とすれば、 $S=2zldr$ であるから、

$$dR_f = 2k\rho z\nu^\alpha l^{1-\alpha} \bar{w}^{2-\alpha} dr$$

$dR_f \cos \bar{\beta}$ はこの力の円周分力であるから、これにその円周速度 ωr を乗じたものは、摩擦に要する 回転エネルギーで、これを dE_f にて表し、なほ $2k\rho z\nu^\alpha$ を μ にて表せば

$$dE_f = \mu \omega l^{1-\alpha} \bar{w}^{2-\alpha} r dr \cos \bar{\beta} \dots\dots\dots (16)$$

プロペラ水車 では β_1 と β_2 とは定角であるから $\bar{\beta}$ は定角である。かくて (7) 式と同じ理論を用ひ、第3図、第4図の速度線図により順次変形し計算し次の結果に達する。

$$\bar{EF} = \omega r - \frac{g\eta_0 H}{2\omega r} \dots\dots (17), \quad \bar{w} = \frac{v}{v_0} \bar{BF} = \frac{Q}{Q_0} \bar{BF} \dots\dots (18)$$

(18) 式の $\bar{w}$ を (16) 式に代入し、更に $\cos \bar{\beta} = \bar{EF}/\bar{BF}$ とすれば

$$dE_f = \mu \omega l^{1-\alpha} (Q/Q_0)^{2-\alpha} \bar{BF}^{1-\alpha} \bar{EF} r dr \dots\dots\dots (19)$$

カプラン水車 では羽根は流量に應じて可動で、速度線図は第5図、第6図に示すやうに変はるから、羽根車内の平均流速を $\bar{w}_K$ 、その傾斜角を $\bar{\beta}_K$ とすれば、大凡 $\bar{w}_K = \bar{BF} \sqrt{v/v_0}$ 、 $\bar{w}_K \cos \bar{\beta}_K = \bar{EF} \sqrt{v/v_0}$ となり、(16) 式は次のやうになる。

$$dE_f = \mu \omega l^{1-\alpha} (Q/Q_0)^{1-\alpha/2} \bar{BF}^{1-\alpha} \bar{EF} r dr \dots\dots (20)$$

(19), (20) の 2 式は次の 1 式に結合することが出来る。

$$dE_f = \mu \omega l^{1-\alpha} \epsilon \bar{BF}^{1-\alpha} \bar{EF} r dr \dots\dots\dots (21)$$

但し プロペラ水車 には $\epsilon = (Q/Q_0)^{2-\alpha}$ 、カプラン水車 には $\epsilon = (Q/Q_0)^{1-\alpha/2}$ 。

かくて (21) 式を羽根の内径から外径まで積分して羽根車の全摩擦エネルギー E_f を求め、それを $g\rho Q$ で除して h の値を定め、それに μ の値を挿入して計算し、なほ水車全系統内の摩擦損失落差の総額を求める方便として、(9) 式の場合と同じく実験値 C を以てすれば、

$$h_f = C z \nu^\alpha l_e^{1-\alpha} \frac{\epsilon}{Q} \frac{u^{4-\alpha}}{\omega} \left\{ \frac{1-a^{4-\alpha}}{4-\alpha} - \frac{1-a^{2-\alpha}}{2(2-\alpha)} \frac{g\eta_0 H}{u^2} \right\} \dots\dots (22)$$

但し l_e は羽根の平均巾、 u は円周速度、 a は羽根車の外径に対する内径の比である。

実物水車に関しては $C_x = C$, $z_x = z$, $l_{ex} = x l_e$, $Q_x = x^2 \sqrt{y} Q$, $u_x = \sqrt{y} u$, $\omega_x = (\sqrt{y}/x) \omega$, $a_x = a$, $H_x = y H$ とし、流量の同じ状態の場合を考へるとして $\epsilon_x = \epsilon$ とすれば、

$$h_{fx} = C z \nu_x^\alpha \frac{y^{1-\alpha/2}}{x^\alpha} l_e^{1-\alpha} \frac{\epsilon}{Q} \frac{u^{4-\alpha}}{\omega} \times \left\{ \frac{1-a^{4-\alpha}}{4-\alpha} - \frac{1-a^{2-\alpha}}{2(2-\alpha)} \frac{g\eta_{0x} H}{u^2} \right\} \dots\dots (23)$$

(22), (23) 2 式の括弧内の値は殆ど等しいから、 $\nu_x = \nu$ とすれば、(11) 式と全く同じ結果を得る。よつて (5) 式により

$$\eta_x = \eta + C z \nu^\alpha l_e^{1-\alpha} \frac{\epsilon}{Q H} \frac{u^{4-\alpha}}{\omega} \left\{ \frac{1-a^{4-\alpha}}{4-\alpha} - \frac{1-a^{2-\alpha}}{2(2-\alpha)} \frac{g\eta_0 H}{u^2} \right\} \left(1 - \frac{1}{x^\alpha y^{\alpha/2}} \right) \dots\dots\dots (24)$$

通常流量の場合は、 $\eta = \eta_0$, $\eta_x = \eta_{0x}$, $Q = Q_0$, $\epsilon = 1$ なるが

故に $\eta_{0x} = \eta_0 + C z \nu^\alpha l_e^{1-\alpha} \frac{1}{Q_0 H} \frac{u^{4-\alpha}}{\omega}$ 以下上式と同じ

(6) 式によれば $\eta_{0x} = 1 - (1-\eta_0)(1/x^\alpha y^{\alpha/2})$

この 2 式を等しと置いて $1-\eta_0$ の値を求め、それを (24) 式に代入し、なほそれに ϵ の値を代入すれば次の結果となる。

$$\eta_x = \eta + (1-\eta_0) \left(\frac{Q}{Q_0} \right)^{1-\alpha} \left(1 - \frac{1}{x^\alpha y^{\alpha/2}} \right) \text{ プロペラ水車 } \dots\dots (25)$$

$$\eta_x = \eta + (1-\eta_0) \left(\frac{Q}{Q_0} \right)^{-\alpha/2} \left(1 - \frac{1}{x^\alpha y^{\alpha/2}} \right) \text{ カプラン水車 } \dots\dots$$

諸多の実験式を参考するに、 α の平均値のしか最も便利なのは $\alpha = 0.25 = 1/4$ であるやうである。よつてこの α の値を採用して (14), (25) の 2 式を総括した結果を書けば、

$$\eta_x = \eta + (1-\eta_0) \left(\frac{Q}{Q_0} \right)^m \left(1 - \frac{1}{x^{1/4} y^{1/8}} \right) \dots\dots\dots (26)$$

但し $m = 1\frac{3}{4}$ フランシス水車、 $= \frac{3}{4}$ プロペラ水車
 $= -\frac{1}{8}$ カプラン水車

昭和 12 年 5 月]