— 研 究 速 報 —

鋁の冷却に及す金ごけの影響 (その 1, 円柱の場合)⁽¹⁾

(昭和 13 年 4 月 10 日 第 15 期定時総会講演會に於て講演)

正 員 石 橋 正⁽²⁾

1. 概要 円柱の側面に附着する 金ごけ が熱の傳導に及す抵抗の項を含む円柱の冷却式を、Carslaw の Contour Integral の方法⁽³⁾を用ひて求め、これを直径約 23 mm の円柱に就て行つた実験結果と比較して、円柱の側面と板の孔とが密着してゐると思はれる間は、この抵抗が殆ど一定であり、円柱の側面と板の孔との間に間隙が生じこれが增大すると共に、抵抗も増加することを明かにした。

2. 基礎の式及び条件及び解

次の様な記号を用ひる。

V = 温度、 t = 時間、 K = 材料の熱傳導率、 H = 熱傳達係数、 c = 材料の比熱、 ρ = 材料の密度、 l = 板の厚さ (即ち円柱の長さ)

$$k = \frac{K}{c\rho}, \quad h = \frac{2}{lc\rho} \frac{H}{K}$$

簡単のため、円柱の軸方向及び板の両面よりの熱の放散は夫々その時の平均温度に比例すると考へる。然る時には

$$V = e^{-ht} v, \quad \frac{\partial v}{\partial t} = k \left(\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} \right) \dots\dots\dots(1)$$

さて次の場合を考へる。

円柱	半径 a	温 度		$k = \frac{K_1}{c_1\rho_1}$	$\lambda = \frac{K_2}{K_1}$
		$t=0$	$t=t$		
		V_0	$V_1 = e^{-ht} v_1$		
板	無限に擴がる	0	$V_2 = e^{-ht} v_2$	$k_2 = \frac{K_2}{c_2\rho_2}$	

円柱と板の孔との間には薄い厚さの 金ごけ の層が存在すると考へる。この層の存在のため熱の傳導が不良になるのを便宜上、円柱の側面に熱傳達係数 α_1 なる抵抗が存在すると考へる。然る時には v_1 及び v_2 は (1) 式の外に次の条件を満足する必要がある。

$$\left. \begin{aligned} t=0 \quad & \text{にて} \quad v_1 = V_0, \quad v_2 = 0 \\ t=t \quad & \text{にて} \quad \frac{\partial v_1}{\partial r} = \lambda \frac{\partial v_2}{\partial r} = -\eta(v_1 - v_2), \\ r=a \quad & \\ t=t \quad & \text{にて} \quad v_2 = 0, \\ r=\infty \quad & \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(2)$$

$$\text{但し } \eta = \frac{\alpha_1}{K_1}$$

(2) の条件を満足する (1) の解は

$$v_1 = V_0 + \frac{V_0}{i\pi} \int_P A J_0(ar) e^{-ka^2 t} d\alpha, \quad r \leq a \dots\dots\dots(3)$$

$$v_2 = \frac{V_0}{i\pi} \int_P B H_0^{(1)}(\mu\alpha r) e^{-ka^2 t} d\alpha, \quad a \leq r \dots\dots\dots(4)$$

$$\left. \begin{aligned} A &= \frac{a\mu\lambda}{\Delta} \frac{H_1^{(1)}(\mu z)}{z}, \quad B = \frac{a}{\Delta} \frac{J_1(z)}{z} \\ \Delta &= J_1(z) H_0^{(1)}(\mu z) - \mu\lambda H_1^{(1)}(\mu z) J_0(z) \\ &\quad + \frac{\mu\lambda}{a\eta} z J_1(z) H_1^{(1)}(\mu z) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(5)$$

$$z = \alpha a = x + iy$$

第 1 図 道 P

但し α は複素数であり $\mu^2 = k/k_2$ である。又 J_0 は Bessel 函数 $H_0^{(1)}$ は第一種の Hankel 函数である。

これ等積分の積分路は何れも第 1 図に示す α 平面上における曲線 P である。但し曲線 P は α 平面上の無限遠点に於て、その上の α のアークメントが P の右端に於ては 0 と $\pi/4$ との間にあり、又その左端に於ては $3\pi/4$ と π との間にある如く選ぶ他曲線の形状に就ては別に制限を設けない⁽⁴⁾。(3), (4) はこれを実變数の積分に変形すれば

$$\begin{aligned} v_1 &= \mu\lambda V_0 \int_0^\infty \frac{c_1}{b_1^2 + c_1^2} \frac{J_0\left(\frac{r}{a}x\right)}{x} e^{-\frac{kt}{a^2}x^2} dx, \\ &\quad \frac{r}{a} \leq 1 \\ b_1 &= \frac{\pi}{2} \left[\frac{J_1(\mu x) J_0(\mu x) + Y_1(\mu x) Y_0(\mu x)}{H_1^{(1)}(\mu x) H_1^{(2)}(\mu x)} \right] J_1(x) \dots\dots\dots(6) \\ &\quad - \frac{\pi}{2} \mu\lambda J_0(x) + \xi x J_1(x) \\ c_1 &= \frac{1}{\mu} \frac{1}{H_1^{(1)}(\mu x) H_1^{(2)}(\mu x)} \frac{J_1(x)}{x} \\ \xi &= \frac{\pi}{2} \frac{\mu\lambda}{a\eta} = \frac{\pi}{2} \frac{\mu\lambda}{a} \frac{K_1}{\alpha_1} \dots\dots\dots(7) \end{aligned}$$

及び

$$\begin{aligned} v_2 &= \frac{2}{\pi} V_0 \int_0^\infty \frac{1}{x} \left[\frac{f_1 J_0\left(\frac{r}{a}x\right)}{e_1^2 + f_1^2} - \frac{e_1 Y_0\left(\frac{r}{a}x\right)}{e_1^2 + f_1^2} \right] e^{-\frac{kt}{a^2}x^2} dx, \\ &\quad 1 \leq \frac{r}{a} \\ e_1 &= J_0(\mu x) \left[1 - \mu\lambda \frac{J_0(x)}{J_1(x)} \frac{J_1(\mu x)}{J_0(\mu x)} + \frac{2}{\pi} \xi x \frac{J_1(\mu x)}{J_0(\mu x)} \right] \\ f_1 &= Y_0(\mu x) \left[1 - \mu\lambda \frac{J_0(x)}{J_1(x)} \frac{Y_1(\mu x)}{Y_0(\mu x)} + \frac{2}{\pi} \xi x \frac{Y_1(\mu x)}{Y_0(\mu x)} \right] \dots\dots\dots(8) \end{aligned}$$

著者の研究の目的には (6), (7), (8) の諸式に於て $\mu = \lambda = 1$ と置いた簡単な式を用ひる方が便利である。依てこれら $\mu = \lambda = 1$ とおけば

(4) Carslaw, 前出, 173 頁。

(1) Effect of Scale on the Cooling of Rivets (I. Cylinder).
(2) Tadasu ISIBASI, Member. The Kyushu Imperial University.
九州帝国大学。(3) Carslaw, The Conduction of Heat (2 版), 201 頁。

$$\left. \begin{aligned} \frac{v_1}{V_0} &= \int_0^\infty \frac{c J_0\left(\frac{r}{a}x\right)}{b^2 + c^2} e^{-\frac{x^2}{4\beta}} dx, \quad \frac{r}{a} \leq 1 \\ b &= \frac{Y_1(x)}{J_1^2(x) + Y_1^2(x)} + \xi x^2 J_1(x) \\ c &= \frac{J_1(x)}{J_1^2(x) + Y_1^2(x)} \end{aligned} \right\} \dots\dots(9)$$

$$\xi = \frac{a^2}{4kt}, \quad \xi = \frac{\pi}{2} \frac{K_1}{a\alpha_1} \quad (\text{これは無名数である}) \dots(10)$$

$$\left. \begin{aligned} \int_0^\infty \left[\frac{f J_1(x)}{e^2 + f^2} J_0\left(\frac{r}{a}x\right) - \frac{e J_1(x)}{e^2 + f^2} Y_0\left(\frac{r}{a}x\right) \right] e^{-\frac{x^2}{4\beta}} dx, \\ 1 \leq \frac{r}{a} \\ e = \xi x^2 J_1^2(x) \\ f = 1 + \xi x^2 J_1(x) Y_1(x) \end{aligned} \right\} \dots(11)$$

第 2 図 温度の変化

上に導いた式より、円柱の冷却状態を測定すれば、 ξ に依る抵抗 ξ の大きさを求めることが出来る。依て著者は直径約 22 mm の円柱を約 1000°C 位に加熱し、これを、巾約 90 mm、長さ約 200 mm の矩形板の中央に穿つた直径約 23 mm の円孔に挿入し鉋打して、その間、板の厚さの中央にて且 $r/a=0$ 及び $r/a=1.5$ の 2 点における温度を測定した。 $r/a=1.5$ の点の温度測定には直径約 0.2 mm の鉋及びコンスタンタン線を用ひこれは常にその位置に固定した。又 $r/a=0$ の点の温度は直径約 0.67 mm のクロメル、アルメル線を使用し、円柱を板の孔に挿入して後直にこの鉋を $r/a=0$ の点に挿入して鉋打を行つた。熱電対に生ずる電圧はオシログラフに導き温度のオシログラムを撮

ログラムを見る時大抵の場合鉋の最初の一打に依り側面が孔の内面に殆ど密着することが明かである故此時間の起点を選び且この時の円柱の温度を V_0 とした。

今円柱及び板材の炭素量を大約 0.2% と見做し

$$a=11.5 \text{ mm}, \quad K_1=K_2=0.09 \text{ cal/cm s}^\circ\text{C}, \\ c_1=c_2=0.16 \text{ cal/g}^\circ\text{C}, \quad \rho_1=\rho_2=7.8 \text{ g/cm}^3 \text{ とすれば}$$

$$k_1=k_2=0.072 \text{ cm}^2/\text{s}, \quad \text{従て}$$

$$\frac{1}{\beta} = \frac{4kt}{a^2} \cong 0.22t \dots\dots\dots(12)$$

これより t を知れば $\frac{1}{\beta}$ が求まる。

第 2 図中には $r/a=0$ 及び $r/a=1.5$ における (9) 及び (11) 式が與へる曲線及び実験より得た曲線の一例を示した。即ち同図中の肉太線は板の厚さ約 45 mm の時に重さが夫夫 10 lbs 及び 6 lbs 鉋を用ひて鉋打した場合の円柱及び板における温度の変化状態で $\frac{1}{\beta}$ は (12) 式から求めた。又同図中の細線は ξ を夫々記載の如き数値にとつた場合の (9) 及び (11) 式が與へる曲線である。

第 3 図 抵抗変化の有様

これを見ると、 $r/a=0$ の点にては実験値は兩者共何れも約 400°C 附近迄は ξ が略一定であるがそれ以後に於ては抵抗が次第に増加してゐることを示してゐる。即ちこの抵抗が増加し始める点が円柱の側面が孔の内面より離れ始める点と思はれる。板の加熱の曲線においてはこの点は明瞭でない。而して ξ が変化し始めてより後の冷却曲線の $1 + \log(v_1/V_0)$ と $1/\beta$ との関係は最初の抵抗の如何に拘らず略一定の傾斜を持つ直線に近い。

今一つの冷却曲線が $\xi=\xi_1$ の曲線より離れて $\xi=\xi_2$ の曲線に移つた時の抵抗をかりに ξ_2 と見做せば、例へば第 3 図の如き曲線群が得られる⁽⁵⁾。初めの抵抗が小なる程第 3 図における曲線の直線部分が短いことは抵抗が小なる程冷却が早いと云ふ事実から當然予想されることである。

因に $\xi=1$ に相當する熱傳達係数は (10) より大約

$$\alpha_1 \cong 4400 \text{ kcal/m}^2\text{h}^\circ\text{C}$$

である。

擱筆するに當り抵抗層その他に関し多大の御教示と御鞭撻とを賜つた本学山縣助教に深く感謝し度い。又実験及び数値計算に関し種々盡力された本学材料強弱学教室の諸氏に厚く感謝する。

(5) 第 3 図の右側の縦線に沿つて記載した数字は板の厚さを示す。即ち 1 は約 15 mm、従て 5 は約 75 mm である。