J101021

非定常揚力面理論に基づく矩形シートのフラッタ解析

渡辺 昌宏^{*1}, 原 謙介^{*1}, Manuel Gonzalez^{*2}, Javier Cuadrado^{*2}Flutter Analysis of a Rectangular Sheet
Based on the Unsteady Lifting Surface TheoryMasahiro Watanabe^{*1}, Kensuke Hara, Manuel Gonzalez and Javier Cuadrado^{*1} Aoyama Gakuin Univ. Dept. of Mechanical Engineering
5-10-1, Fuchinobe, Chuo-ku, Sagami-hara-shi, Kanagawa, 252-5258 Japan

This paper deals with a flutter analysis of a rectangular flexible sheet subjected to axial fluid flow. The unsteady fluid force acting on the sheet surface is calculated by using Doublet-point method, which is based on the unsteady lifting surface theory. The equation of motion of the sheet coupled with the fluid flow is derived by employing the finite element method. The stability of the system is examined by the characteristic roots obtained from the flutter determinant. The effects of the aspect ratio and mass ratio on the flutter velocity and mode are clarified. Moreover, the local work by the fluid force on the sheet surface, and instability mechanism are clarified.

Key Words : Flutter Analysis, Rectangular Plate, Unsteady Lifting Surface Theory, Doublet-Point Method

1. はじめに

フィルム製造機械や印刷機械などでは、ウェブ（連続柔軟媒体）や枚葉シートを空気中で高速搬送する工程や空気を吹付けて乾燥させる工程がある。これらの工程では、空気の流れに起因してフラッタが発生し問題となることがある。このため、ウェブや枚葉シートに発生するフラッタの特性と発生条件および励振メカニズムを明らかにすることは、上記の機械の設計やフラッタ抑止手法の確立のために重要である。

これまでに、基本的な体系である片持ち支持された柔軟なシートに発生するフラッタに関して多くの研究⁽¹⁾が行われているが、これらの研究の多くは、シート幅が十分に広いと仮定して、Large-span近似により流体流れを二次元流れとしてフラッタ解析を行っている。また、細長いシートに対しては、Slender-body近似を適用することで非定常流体力を求め、フラッタ解析を行うことができる。有限幅の矩形シートに発生するフラッタに関して、いくつかの研究が報告されている。Eloyら⁽²⁾はフーリエ変換を用いて三次元ポテンシャル流れによる非定常流体力を求めて、矩形シートのフラッタ解析を行っている。しかしながら、詳細なフラッタ特性や流体力による仕事（エネルギー収支）については明らかにされていない。また、Eloyらの解析ではシートの弾性変形を二次元的な曲げ変形のみに限定している。

一方、航空力学の研究分野では、三次元ポテンシャル流れに基づいた非定常揚力面理論による非定常空気力の計算手法の研究や、非定常空気力と三次元弾性構造物が連成したフラッタの研究が行われている。それらの多くは超音速域で発生するパネルや翼のフラッタを対象とする研究であるが、亜音速域で発生するフラッタに関しては、Doublet-lattice法やDoublet-point法などによる非定常揚力面理論に基づく非定常空気力の計算手法が開発されている。特に、Doublet-point法⁽³⁾（以下、DPMと呼ぶ）は固有値解析が適用でき、非平面形状の構造にも適用できる有用な解析手法の一つである。

本研究は、三次元ポテンシャル流れを基礎式とするDPMを用いて有限幅の矩形シート（以下、シートと呼ぶ）の表面に作用する非定常流体力を求め、FEMにより離散化したシートの運動方程式と非定常流体力が連成したフラッタ方程式を導出した。そして、フラッタ行列式の特性根により系の安定性を調べた。フラッタ解析では、アスペクト比と質量比に対するフラッタ流速とフラッタモードの変化、およびシート表面における非定常流体力による仕事（エネルギー収支）を明らかにした。なお、本解析手法は、任意の形状や境界条件を有する板やシェル構造物、さらに複数の柔軟構造物が流体流れを介して連成する場合にも適用することが出来る手法であるが、本論文では、上流側の一辺を固定したシートのフラッタ解析について述べる。

^{*1} 正員, 青山学院大学 理工学部 機械創造工学科 (〒252-5258 神奈川県相模原市中央区淵野辺 5-10-1)

^{*2} University of La Coruna, Spain

E-mail: watanabe@me.aoyama.ac.jp

2. フラッタ解析

2・1 解析モデル

図1に解析モデルと座標系を示す。密度 ρ_f の流体が x 軸方向に一様流速 U で流れているとする。重力は x 軸方向に作用している。シートのコード、スパン、厚さ、密度をそれぞれ L, b, h, ρ_s と定義する。シートは上流側の一边が固定されており、四角形要素を用いて分割する。四角形要素の二つの側辺が流れに沿うように、シートを N ($=n_x \times n_y$)個に分割する。ここで、 x 軸と y 軸方向の分割数は、それぞれ n_x, n_y とする。

Fig.1 Schematic of the rectangular sheet subjected to axial fluid flow

2・2 シートの運動方程式

変位法を基礎とするFEMを用いて、弾性変形するシートの運動方程式を導出する。ここでは、シートに面内力が作用する場合にも対応できるように運動方程式を導出する。シートは12自由度の四角形板曲げ要素(ACM要素)を用いて離散化する。要素の節点変位ベクトルを $\mathbf{e}(t)$ とし、要素座標系 $(\tilde{x}, \tilde{y})$ で定義された形状関数行列を $\mathbf{N}(\tilde{x}, \tilde{y})$ とすると、要素内でのシート面外変位 u_z は下式のように表すことができる。

$$u_z(\tilde{x}, \tilde{y}, t) = \mathbf{N}(\tilde{x}, \tilde{y}) \mathbf{e}(t) \quad (1)$$

仮想仕事の原理に基づき、要素の運動方程式は以下のように求まる。

$$\mathbf{m} \ddot{\mathbf{e}}(t) + \mathbf{k} \mathbf{e}(t) = \mathbf{f} \quad (2)$$

式中の $\mathbf{m}$, $\mathbf{k}$, $\mathbf{f}$ は、それぞれ質量行列、剛性行列、節点外力ベクトルである。これらは以下の式より求められる。ここで、 $\mathbf{B}$ は歪-変位行列、 $\mathbf{D}_e$ は弾性行列である。また、 Δp_f はシート下面と上面の圧力差から生じる流体力である。

$$\mathbf{m} = \int_V \rho_s \mathbf{N}^T \mathbf{N} dV, \quad \mathbf{k} = \int_V \mathbf{B}^T \mathbf{D}_e \mathbf{B} dV + \int_S \mathbf{G}^T \mathbf{S}_0 \mathbf{G} dS, \quad \mathbf{f} = \int_S \mathbf{N}^T \Delta p_f dS \quad (3)$$

上式で剛性行列 $\mathbf{k}$ を求める式の右辺第二項は、単位幅当りの力として定義される面内力、つまり x, y 軸方向の張力 N_x, N_y と面内せん断力 N_{xy} により付加される幾何剛性の項であり、式中の $\mathbf{G}$ と $\mathbf{S}_0$ は以下の式で与えられる。

$$\mathbf{G} = [\partial \mathbf{N} / \partial \tilde{x}, \partial \mathbf{N} / \partial \tilde{y}]^T, \quad \mathbf{S}_0 = \begin{bmatrix} N_x & N_{xy} \\ N_{xy} & N_y \end{bmatrix} \quad (4)$$

式(2)で得られた要素の運動方程式を重ね合わせることで、全体座標系での節点変位ベクトル $\mathbf{X}(t)$ に関するシートの運動方程式が得られる。また、シート表面の流体摩擦と重力の影響は、流れの方向および重力方向(x 軸方向)に以下の面内力が発生するとして考慮する。式中の C_f と g は、それぞれ流体摩擦係数と重力加速度である。

$$N_x(x) = (2\tau_f + \rho_s h g)(L - x), \quad \tau_f = \rho_f U^2 C_f / 2 \quad (5)$$

2・3 非定常流体力

ラプラス領域に拡張されたDPM⁽⁴⁾を用いて、シートに作用する非定常流体力を求める。シート上面と下面の圧力差より生じる流体圧力(上向きが正)の複素振幅を $\Delta \bar{p}$ とし、シート表面での吹上げ速度の複素振幅を $\bar{w}$ とすると、これらの関係は式(6)に示す三次元ポテンシャル流れを基礎とするクスの特異積分方程式で与えられる。ここで、ラプラス変数を s とし、無次元時間 $\tau = tU/b$ に関して無次元ラプラス変数を $p = sb/U$ と定義する。式中の上付きはラプラス変換した変数を表す。積分範囲 R'_d はシートの全領域である。

$$\bar{w}' = \frac{1}{8\pi} \iint_{R_0} \Delta \bar{p}'(\xi', \eta') K(x'_0, y'_0) d\xi' d\eta' \quad (6)$$

ここで、核関数 $K(x'_0, y'_0)$ は以下の式で与えられる。この核関数はシート幅方向に特異性を有する積分関数 $B(p, r, X)$ を含んでおり、その計算には漸近展開式⁽⁴⁾を用いる。

$$K(x'_0, y'_0) = e^{-p x'_0} B(p, r, X), \quad B(p, r, X) = \int_{-x}^x \frac{e^{p v}}{(v^2 + r^2)^{3/2}} dv \quad (7)$$

$$X = x'_0 = x' - \xi', \quad r = |y'_0| = |y' - \eta'|$$

上式で $\bar{\cdot}$ は無次元化された変数を表し、無次元化された各変数は以下のように定義される。

$$x' = x/b, \quad y' = y/b, \quad \xi' = \xi/b, \quad \eta' = \eta/b, \quad \bar{w}' = \bar{w}/U, \quad \Delta \bar{p}' = \Delta \bar{p}/(\rho_f U^2/2) \quad (8)$$

DPM により非定常流体力を計算するために、図 1 に示すように、要素表面上に (1/4 ~ 3/4 翼弦則に基づき) ダブレット点 (ξ'_j, η'_j) と吹上げ点 (x'_j, y'_j) を配置する。要素表面上の流体圧力をダブレット点 (ξ'_j, η'_j) に集約し、分布した吹上げ速度の代表点を吹上げ点 (x'_j, y'_j) にとると、式 (6) の積分方程式を離散化することができる。各要素の表面積を Δ'_j とすると、離散化された流体圧力は以下の式 (9) で求められる。つまり、 j 番目の要素表面における流体圧力 $\Delta \bar{p}'(\xi'_j, \eta'_j)$ は、全ての要素表面における吹上げ速度 $\bar{w}'(x'_i, y'_i)$, ($i=1 \cdots N$) により定まる。

$$\Delta \bar{p}' = \mathbf{D}(p)^{-1} \bar{\mathbf{w}}' \quad (i, j = 1 \cdots N) \quad (9)$$

$$\bar{\mathbf{w}}' = \{\bar{w}'(x'_i, y'_i)\}, \quad \Delta \bar{\mathbf{p}}' = \{\Delta \bar{p}'(\xi'_j, \eta'_j)\}, \quad \mathbf{D}(p) = [d_{ij}] = \left[\frac{\Delta'_j}{8\pi} K(x'_i - \xi'_j, y'_i - \eta'_j) \right]$$

ここで、任意の位置での吹上げ速度 $\bar{w}'$ は、シート面外変位を $h_s(x', y', \tau)$ とすると、以下のように与えられる。

$$\bar{w}'(x', y') = \frac{\partial}{\partial x'} \bar{h}'_s(x', y') + p \bar{h}'_s(x', y') \quad (10)$$

上式におけるシート面外変位の複素振幅 $\bar{h}'_s$ は、FEM により離散化された要素内の面外変位 $\mathbf{u}_e$ (式 (1)) を用いて与えられる。つまり、各要素の節点外力 (式 (2) 右辺) が全ての要素の節点変位ベクトル $\mathbf{e}(t)$ と関連付けられて求まる。さらに、それらを重ね合わせることで、FEM 全体座標系での節点外力、つまりシートの弾性変形と連成した非定常流体力が求められる。

2・4 流体・構造連成系の安定性解析

要素の質量行列と剛性行列および DPM より得られる節点外力の重ね合せにより、流体・構造連成系の運動方程式は以下のように得られる。ここでは、構造減衰も考慮して式を導出する。式中の $\mathbf{A}_e(p)$ は無次元化された流弾性行列である。また、 $\mathbf{K}_f$ と $\mathbf{K}_g$ はそれぞれ流体摩擦と重力により付加される幾何剛性行列である。

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{X}} + \mathbf{C} \dot{\mathbf{X}} + (\mathbf{K} + \mathbf{K}_g) \mathbf{X} = \frac{1}{2} \rho_f U^2 b (\mathbf{A}_e(p) - \mathbf{K}_f) \mathbf{X} \quad (11)$$

さらに、構造系の固有モードを成分とするモード行列 Φ を用いたモード近似により、 $\mathbf{X} = \Phi \mathbf{q}(t)$ と表すと、モード座標 $\mathbf{q}(t)$ に関する特性方程式であるフラッタ行列式が以下のように求まる。

$$\det \left[s^2 \mathbf{I} + s \mathbf{\Gamma} + \mathbf{\Omega} - \frac{1}{2} \rho_f U^2 b (\tilde{\mathbf{A}}_e(p) - \tilde{\mathbf{K}}_f) \right] = 0 \quad (12)$$

ここで、流れがない ($U=0$) のときの構造系の i 次固有角振動数を ω_i 、減衰比を ζ_i とすると、式中の行列 $\mathbf{\Omega}$ と $\mathbf{\Gamma}$ は、それぞれ ω_i^2 と $2\omega_i \zeta_i$ を対角成分とする行列として与えられる。また、 $\tilde{\mathbf{A}}_e(p) = \Phi^T \mathbf{A}_e(p) \Phi$ で与えられる。

流速 U を変化させて、式 (12) を満足する特性根であるラプラス変数 s を求めて安定性を判別する。式 (12) より得られる特性根 s のうち 1 つでも $\text{Re}[s] > 0$ の根があれば、系は不安定となり、 $\text{Im}[s] \neq 0$ の場合にはフラッタが発生する。この時の流速をフラッタ流速 U_{cf} として定義する。また、系が不安定となる流速におけるフラッタモードを求める。ここでフラッタモードは複素固有モードとして得られる。

シート表面に作用する非定常流体力 $\mathbf{F}$ (式 (11) 右辺) による 1 周期当りの仕事 E_f は、式 (13) で得られる。ここで、 k と N_k は節点番号と全節点の数であり、 $E_{local}^{(k)}$ は節点 k における局所的な流体力による仕事を表す。つまり、シート表面上のエネルギー収支分布が得られる。また、特性根から得られる成長率を零 (一定振幅) として、フラッタモードで振動する変位を節点変位 $\mathbf{X}(t)$ として計算を行う。

$$E_f = \oint \dot{\mathbf{X}}^T \mathbf{F} dt = \oint \dot{\mathbf{X}}^T \left(\frac{1}{2} \rho_f U^2 b \mathbf{A}_e(p) \right) \mathbf{X} dt = \sum_{k=1}^{N_k} E_{local}^{(k)} \quad (13)$$

2・5 支配無次元数と計算パラメータ

本研究で対象とするフラッタ現象を支配する主な無次元数は、アスペクト比 Λ 、質量比 μ 、無次元流速 U^* である。これらの無次元数は下式で定義される。また、無次元フラッタ流速 U_{cf}^* も同様に定義される。式中の D はシートの曲げ剛性であり、 $D = Eh^3/12(1-\nu^2)$ で与えられる。これらの無次元数を用いて計算結果を整理する。

$$\Lambda = b/L, \quad \mu = \rho_f L / \rho_s h, \quad U^* = UL\sqrt{\rho_s h/D}, \quad U_{cf}^* = U_{cf} L\sqrt{\rho_s h/D} \quad (14)$$

以下の計算では、シートの材質をPETとして計算を行った。シートのコード L とスパン b 、および流体密度 ρ_f を変えて、アスペクト比 Λ と質量比 μ を変化させた。計算に用いた主なパラメータの値を以下に示す。

$$\rho_s = 1.8 \times 10^3 [\text{kg/m}^3], \quad E = 5.0 \times 10^9 [\text{Pa}], \quad \nu = 0.4, \quad h = 0.2 [\text{mm}]$$

また、構造減衰 $\zeta_i = 0$ 、流体摩擦係数 $C_f = 0$ 、重力加速度 $g = 0$ として、基本的な系の計算を行った。シートの x 軸方向の分割数は $n_x = 10 \sim 14$ の範囲で設定し、アスペクト比に応じて y 軸方向の分割数 n_y を $4 \sim 14$ の範囲で設定して計算を行った。モード近似には $1 \sim 6$ 次の曲げモードを用いた。

3. 計算結果

3・1 アスペクト比と質量比のフラッタ流速への影響

図2にアスペクト比 Λ に対するフラッタ流速 U_{cf}^* の変化を示す。図は質量比を $\mu = 1$ とした結果である。比較のためにC.Eloyら⁽²⁾の計算結果を×印で示す。また、Large-span近似とSlender-body近似による計算結果を破線と一点鎖線で示す。本解析計算の結果は、C.Eloyらの計算結果より少し低い値であるが良く一致しており、広い範囲のアスペクト比に対して、フラッタ流速を統一的に計算できることがわかる。また、二次元流れを仮定したLarge-span近似は、アスペクト比がおおよそ $\Lambda > 1$ の範囲に限り適用できる。 $\Lambda \approx 0.5$ 付近では、どちらの近似解析手法も適用できないことがわかる。

図3に質量比 μ に対するフラッタ流速 U_{cf}^* の変化を示す。図中の点線、実線、破線はそれぞれアスペクト比が $\Lambda = 0.2, 0.5, 1.0$ の結果である。質量比が約1以下の場合には、質量比が大きくなるとフラッタ流速は低下するが、大域的にはフラッタモードの変化に伴い、局所的な増加となだらかな減少を繰り返しながら変化することがわかる。この局所的なフラッタ流速の増加は、フラッタモードの変化によるものであり、フラッタモードの変化の様子は3・2節で後述する。

Fig. 2 Flutter velocity U_{cf}^* with aspect ratio Λ , for $\mu = 1$

Fig. 3 Flutter velocity U_{cf}^* with mass ratio μ

3・2 フラッタモードとシート表面での流体力による仕事（エネルギー収支）

図4に $\Lambda = 0.5$ 、 $\mu = 1$ の場合のフラッタモードとシート表面での非定常流体力（流体圧力）の時間的変化を示す。図は1周期を8分割して表示している。非定常流体力の大きさはシート表面上に色で表示しており、その振幅は1周期における最大値で正規化して（最大値を1で）表示している。赤色が上向き、青色が下向きを示している。図より、フラッタモードは波が下流に移動する進行波モードであることがわかる。また、下向き（青色）および上向き（赤色）の非定常流体力の分布が、シート下流端付近で交互に発生し、それがシート表面上を上流へ移動していく様子がわかる。

図5に質量比 μ を変化させた場合のフラッタモード（図中の上段）、非定常流体力の変化（中段）および局所的な流体力による仕事の分布（下段）を示す。これらの図は、アスペクト比 $\Lambda = 0.5$ の場合である。流体力による仕事（下段）は、シート表面上の最大値で正規化した値 $\bar{e}_{local}^{(k)}$ を表示している。図より、質量比が小さい場合は、フラッタモードは片持ち梁の曲げ二次モードに近い形状であるが、質量比が大きくなると波が下流に移動する進行波タイプのモードに変化することがわかる。一方、非定常流体力（中段）は上流へ波が移動するモードであり、局所的に振幅が小さくなる位置がある。また、流体力による仕事（下段）は、シートの下流端部付近では負（青色）となっており、シートからエネル

ギが散逸している。シート中央付近から下流域では正（赤色）の領域があり、この領域の流体力によりシートが励振されていることがわかる。つまり、この領域でのエネルギーの流入がフラッタ発生の原因である。また、質量比が大きく進行波モードのフラッタが発生する場合には、エネルギーが入る領域と散逸する領域が交互に複数存在している。

Fig. 4 Flutter motion with fluid force distribution on the sheet surface in a period, for $\Lambda = 0.5$, $\mu = 1$, $U^* = U_{cf}^*$

Fig.5 Flutter modes, fluid force distributions on the centerline of the sheet, and normalized local work $\tilde{E}_{local}^{(k)}$ by the fluid force with changing mass ratio μ , for $\Lambda = 0.5$, $U^* = U_{cf}^*$

4. まとめ

三次元ポテンシャル流れを基礎とする DMP を用いて、有限幅の矩形シートのフラッタ解析を行った。上流側の一边を固定したシートのフラッタ解析により、本解析手法は広い範囲のアスペクト比に対してフラッタ流速を統一的に計算できることを示した。特に、Large-span 近似と Slender-body 近似では計算できないアスペクト比の領域にも適用できることを示した。そして、アスペクト比と質量比のフラッタ流速およびフラッタモードへの影響を明らかにした。また、フラッタ発生時のシート表面における非定常流体力とその仕事の分布を明らかにした。

なお、本研究は、第一著者の 2011 年度在外研究として行われたものであり、受け入れ機関である University of La Coruna (Spain) および諸関係機関に感謝いたします。

文 献

- (1) Paidoussis, M.P., Fluid-Structure Interactions. Slender Structures and Axial Flow, Vol.2 (2004), pp.1137-1220, Elsevier, Academic Press, London.
- (2) Eloy, C., Souilliez, C., and Schouveiler, L., "Flutter of a rectangular plate", *Journal of Fluids and Structures*, Vol.23 (2007), pp.904-919.
- (3) Ueda, T., and Dowell, E.H., "A New Solution Method for Lifting Surfaces in Subsonic Flow", *AIAA Journal*, Vol.20, No.3 (1982), pp.348-355.
- (4) Ueda, T., "Lifting Surface Calculations in the Laplace Domain with Application to Root Loci", *AIAA Journal*, Vol.25, No.5 (1987), pp.698-704.