J122021

最大応力の最小化を目的とするシェル構造体の形状最適手法*

米倉正人^{*1}, 下田昌利^{*2}

Free-form optimization method for shell structures with strength criterion

Masato YONEKURA^{*1} and Masatoshi SHIMODA^{*2}^{*1,2} Toyota Technological Institute.
Hisakata2-12-1, Tenpaku-ku, Nagoya, 468-8511 Japan

In this paper, we present a parameter-free optimization method for finding the smooth optimal free-form of a shell structure. The strength design problem dealt with in this paper involves a minmax problem of von Mises stress. The optimum design problem is formulated as a distributed-parameter shape optimization problem under the assumptions a shell is varied in the out-of-plane direction to the surface and the thickness was constant. The Kreisselmeier-Steinhauser function is used to transpose the local functional of maximum stress to global integral functional so as to avoid non-differentiability. The shape gradient function and the optimality conditions are derived using the material derivative method, and applied to the free-form optimization method. With this method, the smooth optimal free-form of a shell structure is obtained without any shape design parameterization while minimizing the objective functional. The validity of this method is verified though a design example.

Key Words : shape optimization, shell, free-form optimization, von Mises stress, Kreisselmeier-Steinhauser function, minmax problem

1. 緒 言

シェル構造体は省資源、軽量化への寄与が大きく、自動車、航空機、建築構造、携帯電話等に幅広く利用されており、現在求められている環境負荷の低減や社会の持続的発展性の観点からも利用の拡大が期待される構造形態である。シェル構造の大きな特徴の1つは与える曲率分布によって、剛性や強度、振動のような構造特性が劇的に変化する点である。本研究ではシェル構造体を対象に、強度の観点から力学的に最適な形状を求めるための最適手法の開発を行うことを目的とする。これまでのこの種の研究は CAD パラメータを変数とするような離散系の問題として解かれてきた。そのため得られる最適形状はパラメータ依存性とパラメータを設定する設計者依存性を有していた。研究室ではこうした問題を解決できるパラメータ化が不要で、力学的に自然な自由曲面の創成が可能な手法の研究を行っており、本研究では体積制約下での最大応力の最小化問題に対する解法を開発する。著者らはこれまで、シェルの種々の形状最適設計問題に対し、 H^1 勾配法に基づく解法を示してきた⁽¹⁾。 H^1 勾配法は畔上により偏微分方程式で支配される境界値問題の領域最適化の解法として提案された⁽²⁾。変分法に基づく分布系の領域最適化問題として定式化し、導出された形状勾配関数を領域変動の駆動力とするヒルベルト空間の勾配法の一つである。本論文では前述のシェル構造体の最大応力の最小化問題に対して H^1 勾配法(フリーフォルム最適手法と呼ぶ)を適用し、面外の形状変動を設計変数とした最適形状を求めるための解法を提示する。以下の章では、シェル要素の支配方程式、強度設計問題の分布系形状最適化問題としての定式化を示し、形状勾配関数を導出する。続いて形状勾配関数の値を決定するための随伴解析について記した後、フリーフォルム最適

^{*1} 非会員, 豊田工業大学 (〒468-8511 愛知県名古屋市中天白区久方二丁目 12 番地)^{*2} 正員, 豊田工業大学 (〒468-8511 愛知県名古屋市中天白区久方二丁目 12 番地)

E-mail: sd12444@toyota-ti.ac.jp

化手法を適用した設計問題の計算結果を通して本解法の有効性，実用性を示す．

2. シェル要素の支配方程式

区分的に微小な平面の集合体と仮定する線形弾性シェル構造の平衡方程式は以下のように表される．

$$a((u_0, w, \theta), (\bar{u}_0, \bar{w}, \bar{\theta})) = l(\bar{u}_0, \bar{w}, \bar{\theta}), \quad \forall (\bar{u}_0, \bar{w}, \bar{\theta}) \in U \quad (1)$$

ここで，双一次形式 $a(\cdot)$ と一次形式 $l(\cdot)$ はそれぞれ以下のように表される．このとき $(\bar{\cdot})$ は変分を表し， U は変位 (u_0, w, θ) の拘束条件を満たす許容関数空間とする．

$$a((u_0, w, \theta), (\bar{u}_0, \bar{w}, \bar{\theta})) = \int_{\Omega} \left\{ C_{\alpha\beta\gamma\delta} (u_{0\alpha,\beta} - x_3 \theta_{\alpha,\beta}) (\bar{u}_{0\gamma,\delta} - x_3 \bar{\theta}_{\gamma,\delta}) + C_{\alpha\beta}^s (w_{,\alpha} - \theta_{\alpha}) (\bar{w}_{,\alpha} - \bar{\theta}_{\alpha}) \right\} d\Omega \quad (2)$$

$$l(\bar{u}_0, \bar{w}, \bar{\theta}) = \int_A (f_{\alpha} \bar{u}_{0\alpha} - m_{\alpha} \bar{\theta}_{\alpha} + \bar{q} w) dA + \int_{\partial A} (N_{\alpha} \bar{u}_{0\alpha} ds - M_{\alpha} \bar{\theta}_{\alpha} + Q \bar{w}) ds \quad (3)$$

ここで， A は中央面， h は板厚を表し，領域 Ω は $\Omega = A \times (-h/2, h/2)$ で定義される．また， $\{C_{\alpha\beta\gamma\delta}\}_{\alpha,\beta,\gamma,\delta=1,2}$ ， $\{C_{\alpha\beta}^s\}_{\alpha,\beta=1,2}$ はそれぞれ膜力とせん断力に関する剛性テンソルを表し， $\{u_{0\alpha}\}_{\alpha=1,2}$ ， w ， $\{\theta_{0\alpha}\}_{\alpha=1,2}$ はそれぞれ板中心面の面内変位，面外変位と回転角を表す．また， x_3 は面外方向である．また，外力は領域 A に単位面積当たりの荷重として，面外荷重 q ，面外モーメント $m = \{m_{\alpha}\}_{\alpha=1,2}$ ，面内荷重 $f = \{f_{\alpha}\}_{\alpha=1,2}$ ，各部境界 ($\subset \partial A$) には単位長さあたりの荷重として，面内力 $N = \{N_{\alpha}\}_{\alpha=1,2}$ ，せん断力 Q ，曲げモーメント $M = \{M_{\alpha}\}_{\alpha=1,2}$ が作用しているものとする．なお，本論文ではテンソルの添字表記において，総和規約と空間座標に関する偏微分表記法 $(\cdot)_{,i} = \partial(\cdot) / \partial x_i$ を用いる．

3. シェル構造の最適化問題

3・1 領域変動の仮定

初期領域 Ω ，中央面 A ，境界 ∂A ，端面 S の線形弾性体シェル構造が中央面の面外領域変動(設計速度場) V により領域 Ω_s ，中央面 A_s ，境界 ∂A_s ，端面 S_s となるものと仮定し，領域は面内方向へは変動しないこと，及び板厚も変動しないこととする． s は領域の変動履歴を表す．

Figure 1 Domain variation induced by V

3・2 感度係数の導出

体積及び状態方程式(1)を制約条件とし，ミーゼス応力 σ_M のシェルの表裏での最大値の最小化を目的とする分布系の形状最適化問題は次のように表すことができる．

$$\text{Find } A_s \quad (4)$$

$$\text{that minimise } \max_{x \in \Omega} \frac{\sigma_M}{\sigma_a} \quad (5)$$

$$\text{subject to } Eq.(1), M = \int_A h dA \leq M_0 \quad (6)$$

ここで M, M_0 はそれぞれ体積とその制約値, σ_a は規準化のためのスカラー定数を表す. 最大応力の最小化問題には局所性に基づくその特異性と変動に伴う微分不可能の問題が潜在しているため, 式(5)の局所目的汎関数の感度を直接求めることは困難である. そのため式(5)の目的関数を KS 関数⁽³⁾を用いて, 次のように滑らかで微分可能な積分汎関数へ変換する.

$$\max_{x \in \Omega} \frac{\sigma_M}{\sigma_a} \rightarrow \frac{1}{\rho} \ln \left\{ \frac{1}{\int_{\tilde{A}} d\tilde{A}} \int_{\tilde{A}} \exp \left(\frac{\sigma_M}{\sigma_a} \rho \right) d\tilde{A} \right\} \quad (7)$$

ここで, 領域 Ω において, シェルの表と裏の応力分布を片面のみの 1 面として扱っている. この時, A_1 をシェルの表面, A_2 を裏面とすると, $A_1 \cup A_2 = \tilde{A}$ であり, $A_1 \cap A_2 = \emptyset$ である.

また, ρ は定数であり, ρ が十分大きな値を取る時, 最大値を包絡する十分滑らかな関数となる.

この問題に対するラグランジュ汎関数は $(\bar{u}_0, \bar{w}, \bar{\theta})$, Λ をそれぞれ状態方程式と体積制約に対するラグランジュ乗数として次のように表される.

$$L(u_0, w, \theta, \bar{u}_0, \bar{w}, \bar{\theta}, \Lambda) = \frac{1}{\rho} \ln \left\{ \frac{1}{\int_{\tilde{A}} d\tilde{A}} \int_{\tilde{A}} \exp \left(\frac{\sigma_M}{\sigma_a} \rho \right) d\tilde{A} \right\} + l(\bar{u}_0, \bar{w}, \bar{\theta}) - a((u_0, w, \theta), (\bar{u}_0, \bar{w}, \bar{\theta})) + \Lambda(M - M_0) \quad (8)$$

ここで作用する零でない外力 N, Q, M の作用する部分境界は変動しないことと, シェル表面に作用する荷重は物質固定 ($\dot{f} = \dot{m} = \dot{q} = \dot{p} = 0$) を仮定すると, ラグランジュ汎関数の領域変動に対する物質導関数 $\dot{L}$ は,

$$\begin{aligned} \dot{L} = & \int_{\tilde{A}} G_j \mathbf{n} \cdot \mathbf{V} d\tilde{A} + \frac{\int_{\tilde{A}} \exp \left(\frac{\sigma_M}{\sigma_a} \rho \right) \frac{\partial \sigma_M}{\partial \sigma_{\delta\gamma}} \sigma'_{\delta\gamma} d\tilde{A}}{\sigma_a \int_{\tilde{A}} \exp \left(\frac{\sigma_M}{\sigma_a} \rho \right) d\tilde{A}} - a((u'_0, w', \theta'), (\bar{u}_0, \bar{w}, \bar{\theta})) \\ & + \int_{\tilde{A}} G_a \mathbf{n} \cdot \mathbf{V} d\tilde{A} + l(\bar{u}'_0, \bar{w}', \bar{\theta}') - a((u_0, w, \theta), (\bar{u}'_0, \bar{w}', \bar{\theta}')) + \int_{\tilde{A}} G_p \mathbf{n} \cdot \mathbf{V} d\tilde{A} + \Lambda'(M - M_0) + \Lambda \int_{\tilde{A}} G_1 \mathbf{n} \cdot \mathbf{V} d\tilde{A} \quad (9) \end{aligned}$$

ここで端面 S は $S = \partial A \times (-h/2, h/2)$ で定義され, $\mathbf{n}$ は中央面の単位法線ベクトル, $\mathbf{V}$ は領域変動 s に対する速度場, $(\cdot)'$ は形状導関数を表す. また, $\sigma_{\delta\gamma}(x_3) = C_{\alpha\beta\gamma\delta} (u_{0\alpha,\beta} + x_3 \theta_{\alpha,\beta}) (\bar{u}_{0\gamma,\delta} + x_3 \bar{\theta}_{\gamma,\delta})$ である. G_j, G_a, G_p, G_1 は感度関数の形状勾配密度関数で以下のように表わされる.

$$G_j = \frac{H \exp \left(\frac{\sigma_M}{\sigma_a} \rho \right)}{\int_{\tilde{A}} \exp \left(\frac{\sigma_M}{\sigma_a} \rho \right) d\tilde{A}} - \frac{H}{\int_{\tilde{A}} d\tilde{A}} \quad (10)$$

$$G_a = - \left\{ C_{\alpha\beta\gamma\delta} \left(u_{0\alpha,\beta} + \frac{h}{2} \theta_{\alpha,\beta} \right) \left(\bar{u}_{0\gamma,\delta} + \frac{h}{2} \bar{\theta}_{\gamma,\delta} \right) \right\} + \left\{ C_{\alpha\beta\gamma\delta} \left(u_{0\alpha,\beta} - \frac{h}{2} \theta_{\alpha,\beta} \right) \left(\bar{u}_{0\gamma,\delta} - \frac{h}{2} \bar{\theta}_{\gamma,\delta} \right) \right\} \quad (11)$$

$$G_p = H f_{\alpha} \bar{u}_{0\alpha} - H m_{\alpha} \bar{\theta}_{\alpha} + H q \bar{w} \quad (12)$$

$$G_1 = hH \quad (13)$$

ここで H は平均曲率の 2 倍である. G はラグランジュ汎関数 L の停留条件から導出される状態方程式と随伴方程式を解き, 状態変数 (u_0, w, θ) と随伴変数 $(\bar{u}_0, \bar{w}, \bar{\theta})$ を求めることにより決定できる.

$$a((u'_0, w', \theta'), (\bar{u}'_0, \bar{w}', \bar{\theta}')) = l(\bar{u}'_0, \bar{w}', \bar{\theta}') \quad \forall (\bar{u}'_0, \bar{w}', \bar{\theta}') \in U \quad (14)$$

$$a((u'_0, w', \theta'), (\bar{u}_0, \bar{w}, \bar{\theta})) = \frac{\int_{\tilde{A}} \exp \left(\frac{\sigma_M}{\sigma_a} \rho \right) \frac{\partial \sigma_M}{\partial \sigma_{\delta\gamma}} \sigma'_{\delta\gamma} d\tilde{A}}{\sigma_a \int_{\tilde{A}} \exp \left(\frac{\sigma_M}{\sigma_a} \rho \right) d\tilde{A}} \quad \forall (\bar{u}'_0, \bar{w}', \bar{\theta}') \in U \quad (15)$$

ここで式(14)は状態変数 $(\mathbf{u}_0, \mathbf{w}, \boldsymbol{\theta})$ を決定するための状態方程式となっている。また、式(15)は随伴変位 $(\bar{\mathbf{u}}_0, \bar{\mathbf{w}}, \bar{\boldsymbol{\theta}})$ を決定するための随伴方程式である。一方、体積の不等式制約に対する Lagrange 定数 Λ の最適性の条件は、次のような Kuhn-Tucker 条件により与えられる。

$$\Lambda(M - M_0) = 0, M - M_0 \leq 0, \Lambda \geq 0 \quad (16)$$

状態変数 $(\mathbf{u}_0, \mathbf{w}, \boldsymbol{\theta})$ と随伴変位 $(\bar{\mathbf{u}}_0, \bar{\mathbf{w}}, \bar{\boldsymbol{\theta}})$ および体積の不等式制約に対する Lagrange 定数 Λ が、それぞれ式(14), (15), (16)によって決定されれば、式(10)の Lagrange 定数形式の物質導関数 $\dot{L}$ は目的汎関数の物質導関数と一致して次式となる。

$$\dot{L} = \int_{\tilde{\mathcal{A}}} (G_j + G_u + G_p + \Lambda G_1) \mathbf{n} \cdot \mathbf{V} d\tilde{\mathcal{A}} \quad (17)$$

3・3 随伴方程式

状態方程式(14)と随伴方程式(15)は有限要素法を用いて解くことができる。ここでは随伴方程式中の初期応力には熱応力を利用した。このとき、シェルの表と裏で熱ひずみ量、熱応力方向が異なるので、表と裏に独立の熱応力をかけ、得られたひずみを重ね合わせることによって、随伴ひずみを求めた。

3・4 形状変動

滑らかな自由曲面形状を求めるため、これまで開発してきたシェルのフリーフォーム最適化手法を適用した。ヒルベルト空間の勾配法である、 H^1 勾配法に基づく方法で、勾配法で必要となる正定値テンソルとして、弾性支持された、(対角項が重み付けられた)疑似線形弾性シェルの剛性テンソルを用い、形状を写像変換することの特徴とする。すなわち弾性支持された疑似線形弾性体のシェル表面に負の形状勾配関数 $-\mathbf{G}$ に比例した法線方向荷重を与えることにより、目的汎関数を減少させる設計速度場 $\mathbf{V}$ を求めている。この解析を速度場解析と呼ぶ。局所座標系で表した設計速度場 $\mathbf{V} = \{\mathbf{V}_i\}_{i=1,2,3}$ は面内速度場 $\mathbf{V}_0 = \{\mathbf{V}_{0\alpha}\}_{\alpha=1,2}$ と面外速度場 $\mathbf{V}_3$ の組み合わせとして表すことができ、速度場解析の支配方程式は式(18)ように表される。

$$\alpha \left((\mathbf{V}_{0\alpha}, \mathbf{V}_3, \boldsymbol{\theta}), (\bar{\mathbf{u}}_0, \bar{\mathbf{w}}, \bar{\boldsymbol{\theta}}) \right) + \alpha \left(\langle \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} \rangle \mathbf{n}, (\bar{\mathbf{u}}_0, \bar{\mathbf{w}}, \bar{\boldsymbol{\theta}}) \right) = \langle \mathbf{G} \mathbf{n}, (\bar{\mathbf{u}}_0, \bar{\mathbf{w}}, \bar{\boldsymbol{\theta}}) \rangle, (\mathbf{V}_{0\alpha}, \mathbf{V}_3, \boldsymbol{\theta}) \in C_\theta, \forall (\bar{\mathbf{u}}_0, \bar{\mathbf{w}}, \bar{\boldsymbol{\theta}}) \in C_\theta \quad (18)$$

この式で得られた $\mathbf{V}$ を用いてシェルの面外方向への形状更新を繰り返すことにより、収束形状が求められる。なお、形状変動量及びメッシュの平滑化へ影響を与えるバネ定数 α については既報⁽⁴⁾にて考察しており、本報ではそこでの数値計算結果で得られた推奨値を用いた。

4. 計算結果

図 2(a)に対象とした U 字板の剛性解析での条件を示す。U 字板の平板部分は一辺が 60mm の正方形板で、半径 20mm の半円板で繋がれている。剛性解析では U 字板の頂点を y 軸、z 軸並進方向拘束、x 軸、y 軸回転方向拘束し、U 字板の端に一樣な Z 軸方向の荷重を負荷する。速度場解析では図 2(b)に示すように板の縁を並進方向拘束とした。この問題に対する初期形状の応力分布を図 3(a)に、得られた最適形状の応力分布を図 3(b)に示す。曲げ負荷状態にあるこの問題では応力の集中する曲面部分に縦にビードが入り、曲面頂点部において横方向にビードが入ることによって、応力を分散していることが分かる。このとき、最大応力は初期形状に比較して、72%減少した。

Figure 2 Boundary conditions of U-bracket problem

Figure 3 Obtained shape and calculated results of U-bracket problem

5. まとめ

シェル構造体を対象に面外方向の形状変動により最適な形状を求めるための数値解析手法を提案した。本手法はこれまで開発してきた H^1 勾配法に基づく方法であり、パラメータフリーで滑らかな境界形状が得られることが特徴である。本研究では設計問題として、体積制約下における最大応力の最小化問題を扱い、最大応力の持つ局所性に基づく特異性や微分不可能の問題を解決するために KS 関数を用いて滑らかで微分可能な積分汎関数へと変換し、これを目的関数とした。この目的関数を用いて、形状勾配関数を理論的に導出し、 H^1 勾配法を用いて基本的な設計問題へ適用した。結果として良好な収束と妥当な最適形状が得られ、提案した手法の有効性が確認された。

文 献

- (1) M. Shimoda, "Free-Form Optimization Method for Designing Automotive Shell Structures", SAE Int. J. Passeng. Cars – Electron. Electr. Syst. 4(1), (2011), pp.42-54.
- (2) 畔上秀幸, "領域最適化問題の一解法", 日本機械学会論文集 A 編, Vol. 60, No.574 (1994), pp. 1479-1486.
- (3) G. Kreisselmeier and R. Steinhauser, "Systematic control design by optimizing a vector performance index", In International Federation of Active Controls Symposium on Computer-Aided Design of Control Systems, Zurich, Switzerland, 1979.
- (4) M. Shimoda, K. Iwasa and H. Azegami, A Shape Optimization Method for the Optimal Free-form Design of Shell structures, CD-Proceedings of 8th World Congress on Structural and Multidisciplinary Optimization (WCSMO-8), H. C. Rodrigues, J. M. Guedes, et al. (eds.), (2006-6, Lisbon)
- (5) 下田昌利, 畔上秀幸, 桜井俊明, "形状最適化におけるミニマックス問題の数値解法", 日本機械学会論文集 A 編, Vol. 63, No.607 (1997), pp. 158-165.
- (6) S. Arnout, M. Firl, K. U. Bletzinger, "Parameter free shape and thickness optimization considering stress response", *Structural and Multidisciplinary Optimization*, Vol. 45, (2012), pp.801–814.