G0110101

変分的積分法に基づく離散的なラグランジュ系とLC伝送回路の数値解析*

西山昂宏^{*1}, 塙 智史^{*2}, 吉村 浩明^{*3}

Discrete Lagrangian Systems and Variational Integrators for L-C Transmission Lines

Takahiro NISHIYAMA^{*1}, Satoshi HANAWA and Hiroaki YOSHIMURA^{*1} School of Fundamental Science and Engineering, Waseda University
3-4-1, Okubo, Shinjuku, Tokyo, 169-8555, Japan

In this paper, we consider a one dimensional L-C transmission line as a serial chain of L-C circuits with holonomic constraints and we propose a variational integrator for such an interconnected system by the discrete Lagrange-d'Alembert principle. We show how to formulate the discrete Lagrangian system for the L-C transmission line by introducing the extended Lagrangian and we finally show the numerical validity of our theory for evaluating energy errors in a long-time numerical integrations by comparing with the case by the 4-th order Runge-Kutta method.

Key Words : Discrete Lagrangian Mechanics, Variational Integrators, Interconnected Systems

1. 緒 言

分子動力学や天体力学の数学モデルであるハミルトン系やラグランジュ系はエネルギー保存であり、その数値解析では、汎用の数値積分法として良く用いられている、4次ルンゲ・クッタ法などのスキームを採用した場合、長時間の数値積分においてエネルギーに大きな誤差が発生し、数値的な不安定性を招く問題が知られている。これに対して、ハミルトン系では、長時間計算におけるエネルギー誤差が押さえられる、シンプレクティック構造を保存するシンプレクティック積分法やエネルギーを保存する数値積分法などが開発されている。一方、ラグランジュ系については、離散的なハミルトンの原理に基づく変分的積分法が開発されている。これは離散的なハミルトンの原理から離散的オイラー・ラグランジュ方程式を定式化するものであり、離散的なラグランジュ2形式（離散化されたシンプレクティック構造）を保存する数値積分法である。現実の力学系は、複数の部分システムが相互接続した系である。そこで、本論文では、相互接続系の一つの例として、ホロノミック拘束を受けるL-C伝送回路を考え、離散的ラグランジュ・ダランベール原理に基づく離散の変分的積分法を提案し、数値解析によって有効性を示す。

2. L-C伝送回路と離散的ラグランジュ系

2.1 1次元L-C伝送回路

図1に示すように、1次元L-C伝送回路は一組のL-C回路を基本モジュールとした内部接続系として考えることができる⁽²⁾。隣接モジュール間の内部接続条件は、各点 $x \in W = W_1 \times \cdots \times W_n$ に対して、局所座標で

$$\dot{q}_{k-1} = \dot{q}_k, \quad \bar{V}_k = -V_{k+1}$$

と与えられる。

また、基本モジュール内部におけるキルヒホッフの電流則 (KCL) は、各点 $x_k \in W_k$ に対して、局所座標を用

*1 早稲田大学大学院基幹理工学研究科 (〒169-8555 東京都新宿区大久保 3-4-1)

*2 早稲田大学大学院基幹理工学研究科 (現 日立オートモティブシステムズ)

*3 正員, 早稲田大学理工学術院
Email: yoshimura@waseda.jp

Fig. 1 1次元L-C伝送回路

いて,

$$\begin{aligned} -\dot{q}_k + \dot{q}_{C_k} + \dot{q}_{L_k} &= 0, \\ \dot{q}_{L_k} - \dot{q}_k &= 0 \end{aligned}$$

として与えられる。KCL拘束はホロノミック拘束であり、拘束面は

$$\begin{aligned} \phi_k^1 &= -\bar{q}_k + q_{C_k} + q_{L_k} - A_{k1} = 0, \\ \phi_k^2 &= q_{L_k} - q_k - A_{k2} = 0 \end{aligned}$$

として表される。ここに、 A_{k1} , A_{k2} は適当な積分定数である。

基本モジュールは、2つの外部ポートを持つL-C回路と見なすことができる。隣り合う基本モジュールと接続することを考えると、2つの外部ポートには電圧 $\bar{V}_k$ と V_k が存在すると見なすことができ、これを外電圧場として考える。外電圧場を局所座標を用いて記述すると、

$$e_k = (\bar{q}_k, q_{C_k}, q_{L_k}, q_k, V_k, 0, 0, \bar{V}_k)$$

と書くことができる。

2.2 ラグランジュ・ダランベール原理

L-C伝送回路の基本モジュールについて、ラグランジュ・ダランベール原理に基づいて、外電圧場を持つラグランジュ力学系として定式化を行う。ラグランジアン $\mathcal{L}_k$ は

$$\mathcal{L}_k = \frac{1}{2} L_k (\dot{q}_{L_k})^2 - \frac{(q_{C_k})^2}{2C_k}$$

と定義できる。ここで、ラグランジアン $\mathcal{L}_k : TW_k \rightarrow \mathbb{R}$ に対して、KCLによるホロノミック拘束

$$\begin{aligned} \phi_k^1 &= -\bar{q}_k + q_{C_k} + q_{L_k} = A_1, \\ \phi_k^2 &= q_{L_k} - q_k = A_2 \end{aligned}$$

を含む拡大ラグランジアン $\bar{\mathcal{L}}_k : TW_k \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ を

$$\bar{\mathcal{L}}_k = \frac{1}{2} L_k (\dot{q}_{L_k})^2 - \frac{(q_{C_k})^2}{2C_k} + \mu_{k1} \phi_k^1 + \mu_{k2} \phi_k^2$$

と定義する。ここに、 μ_{k1} , μ_{k2} はラグランジュ未定乗数である。ラグランジュ・ダランベール原理は、すべての δx_k , $\delta \mu_k^\alpha$ に対して、

$$\delta \int_a^b \bar{\mathcal{L}}_k dt + \int_a^b e_k \cdot \delta x_k dt = 0$$

として与えられる。

2.3 離散的ラグランジュ・ダランベール原理

離散的なラグランジュ・ダランベール原理により、離散的力学系の定式化を行う。KCL によるホロノミック拘束

$$\begin{aligned}\phi_k^1(x_k(t_l)) &= -\bar{q}_k(t_l) + q_{C_k}(t_l) + q_{L_k}(t_l) - A_{k1} = 0, \\ \phi_k^2(x_k(t_l)) &= q_{L_k}(t_l) - q_k(t_l) - A_{k2} = 0\end{aligned}$$

を含む拡大ラグランジアン $\bar{\mathcal{L}}_k^d: W_k \times W_k \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ は、

$$\begin{aligned}\bar{\mathcal{L}}_k^d(x_k(t_l), x_k(t_{l+1}), \mu_{k1}(t_l), \mu_{k2}(t_l)) \\ = h \left[\frac{1}{2} L_k \left\{ \frac{q_{L_k}(t_{l+1}) - q_{L_k}(t_l)}{h} \right\}^2 - \frac{\{q_{C_k}(t_l)\}^2}{2C_k} \right] + \mu_{k1}(t_l) \cdot \phi_k^1(x_k(t_l)) + \mu_{k2}(t_l) \cdot \phi_k^2(x_k(t_l))\end{aligned}$$

と定義する。ここに、 $\mu_{k1}(t_l)$, $\mu_{k2}(t_l)$ はラグランジュ未定乗数である。離散的ラグランジュ・ダランベール原理は、すべての $\delta x_k(t_l)$, $\delta \mu_k^\alpha(t_l)$ に対して、

$$\delta \sum_{l=0}^{N-1} \bar{\mathcal{L}}_k^d + \sum_{l=0}^{N-1} \{e_k^+ \cdot \delta x_k(t_{l+1}) + e_k^- \cdot \delta x_k(t_l)\} = 0$$

となる。計算すると、変分的積分法

$$q_{L_k}(t_{l+1}) = 2q_{L_k}(t_l) - q_{L_k}(t_{l-1}) + \frac{h^2}{L_k C_k} \{q_{L_{k-1}}(t_l) - q_{L_k}(t_l) + A_k\} - \frac{h^2}{L_k C_{k+1}} \{q_{L_k}(t_l) - q_{L_{k+1}}(t_l) + A_{k+1}\}$$

を得る。

3. 数 値 解 析

3.1 計算条件

線形 L-C 伝送回路について、変分的積分法と 4 次ルンゲ・クッタ法で計算したものとの比較・検討を行う。計算条件を下記のように設定する。

- モジュールの数: $n = 200$
- 時間刻み: $h = 1.0 \times 10^{-1}$
- 計算時間: $t_{end} = 1.0 \times 10^4$
- パラメータ: $L_k = 0.5$, $C_k = 0.5$ ($k = 1, \dots, 200$)
- 周期境界: $q_{L_0}(t_l) = q_{L_n}(t_l)$, $q_{L_{n+1}}(t_l) = q_{L_1}(t_l)$
- 積分定数: $A_k = 0$, ($k = 1, \dots, 200$)
- 初期条件:

$$\begin{cases} q_{C_k}(t_0) = q_{C_k}(t_1) = \sin((k-1)\pi/20) & (k = 1, \dots, 41) \\ q_{C_k}(t_0) = q_{C_k}(t_1) = 0.0 & (k = 42, \dots, 200) \\ q_{L_{k-1}}(t_0) = q_{C_k}(t_0) + q_{L_k}(t_0) + A_k & (k = 1, \dots, 200) \\ q_{L_{k-1}}(t_1) = q_{C_k}(t_1) + q_{L_k}(t_1) + A_k & (k = 1, \dots, 200) \end{cases}$$

3.2 数値解析結果

本系はエネルギー保存系であるので、長時間の数値解析においてエネルギー保存性が成立しているかどうかを確認する。また、周期境界条件においては、全運動量（フラックス）も連続系では保存するので、その保存性についても数値解析によって検討する。数値解析で用いた、離散的な全エネルギー E_d と離散的な全運動量 M_d は

$$E_d = \sum_{i=1}^n \left[\frac{1}{2} L_k \left\{ \frac{q_{L_k}(t_{l+1}) - q_{L_k}(t_l)}{h} \right\}^2 + \frac{\{q_{C_k}(t_l)\}^2}{2C_k} \right], \quad M_d = \sum_{i=1}^n \left[L_k \left\{ \frac{q_{L_k}(t_{l+1}) - q_{L_k}(t_l)}{h} \right\} \right]$$

によって与えられるものとする。これらに関する数値計算結果を以下に示す。図 2 に離散的な全エネルギー、図 3 に離散的な全運動量について、変分的積分法及び 4 次ルンゲ・クッタ法の各々で計算した結果を示す。但し、図中の赤線は陽的な変分的積分法、緑線は 4 次ルンゲ・クッタ法を表す。

Fig. 2 Energy Errors

Fig. 3 Momentum

図2からも明らかなように、変分的積分法では離散的な全エネルギーは高い数値精度で有界性を保っているのに対して、4次ルンゲ・クッタ法では、離散的な全エネルギーが消散していくことが判る。また、離散的な全運動量についても、変分的積分法では高い精度で保存されているのに対して、4次のルンゲクッタ法では十分な精度では運動量は有界ではあるものの保存していないことが確認できた。

4. 結 言

本研究では、1次元線形L-C伝送回路を基本モジュールの内部接続系からなる系としてモデル化し、ダイナミクスの定式化を行った。すなわち、各モジュールごとにKCL拘束をホロノミック拘束としてラグランジアンに組み込み、拡大ラグランジアンを定義して、各モジュールの境界に外電圧が作用する系とみなすことで、離散的ラグランジュ・ダランベール原理を用いて定式化した。これにより、陽的な変分的積分法が得られることを示した。

線形L-C伝送回路について、導出した変分的積分法と連続系を4次ルンゲ・クッタ法で離散化した場合の数値解析の比較を行った。その結果、4次ルンゲクッタ法による数値積分では、長時間で離散的な全エネルギーが発散していくのに対して、提案した変分的積分法では、離散的な全エネルギーは長時間に渡って有界であり、数値精度の面で優れていることが判った。また、変分的積分法では全運動量が保存するのに対して、4次のルンゲ・クッタ法では離散的な全運動量は保存しないことが判った。

謝 辞

本研究は、科学研究費補助金 基盤研究 (C) 26400408, 科学技術振興機構 CREST, 及び IRSES project Geomech-246981 の支援を受けている。

文 献

- (1) J. E. Marsden and M. West, Discrete mechanics and variational integrators, *Acta Numerica*, **10**, pp.357–514, 2001.
- (2) H. Yoshimura and J. E. Marsden, Dirac structures and implicit Lagrangian systems in electric networks, *Proc. of the 17th International Symposium on Mathematical Theory of Networks and Systems*, WeA08.5, pp.1444-1449, 2006.
- (3) M. Leok and T. Ohsawa, Discrete Dirac structures and variational discrete Dirac mechanics, *Found. Comput. Math.* DOI 10.1007/s10208-011-9096-2, 2011.
- (4) H. Jacobs and H. Yoshimura, Tensor products of Dirac structures and interconnection in Lagrangian mechanics, *J. Geo. Mech.*, pages 1-34, 2014.