431 FEM 汎用プログラムによる K_I, K_{II} の高精度解析手法の応用 (2次元問題)

Application of a commercial FEM program for calculating accurately K_I, K_{II} of 2D problems

○ 正 牛島邦晴 (九産大), 西谷弘信 (九大名誉), 才本明秀 (長崎大), 寺西高広 (九産大)

Kuniharu USHIJIMA, Kyushu Sangyo University, 2-3-1, Matsukadai, Higashi-ku, Fukuoka, 813-8503

Hironobu NISITANI, Kyushu University, 6-10-1 Hakozaki, Higashi-ku, Fukuoka, 812-8581

Akihide SAIMOTO, Nagasaki University, 1-14 Bunkyo-machi, Nagasaki, 852-8521

Takahiro TERANISI, Kyushu Sangyo University, 2-3-1, Matsukadai, Higashi-ku, Fukuoka, 813-8503

Keywords; Finite Element Method, Linear Notch Mechanics, Linear Crack Mechanics, Stress Intensity Factor

1 緒 言

有限要素法 (FEM) はその高い汎用性により, き裂や切欠き等の応力集中を持つ構造の応力解析に広く用いられている. FEM を用いて応力集中問題を精度よく解析するためには, 応力場の特徴を利用した評価法が必要不可欠となる. 本研究では, 先に切欠き問題に適用した線形切欠き力学に基づく FEM 汎用プログラムによる高精度解析手法⁽¹⁾を, き裂を持つ構造の応力拡大係数 (K_I, K_{II}) の算出に応用する.

2 解析方法

FEM 解析で求めたき裂あるいは切欠きによる応力分布から応力拡大係数または応力集中係数を精度よく求めるためには, 応力場の特徴を正しく知る必要がある. ここでは一例として, モード I の一様引張り応力 σ_∞ を受ける無限板中に 1 個の円孔がある場合 (図 1 参照) を考える⁽²⁾.

切欠き底付近の x 軸上の応力分布は, Neuber⁽³⁾ の解を変形することによって次のように表される.

$$\sigma_y(x) = \sigma_\infty \cdot \frac{m^4 \xi^3 + m^2 (m^2 - m - 3) \xi + m + 1}{(m-1)(m^2-1)} \quad (1)$$

ここで, $m = \sqrt{a/\rho}$, $\xi = (a+x)/\sqrt{a^2 + m^2(2ax+x^2)}$ である. このパラメータ ξ を x/ρ の関数として表すと次式

$$\xi = 1 - \frac{m^2-1}{m^2} \cdot \frac{x}{\rho} + \frac{3(m^2-1)}{2m^2} \cdot \frac{x^2}{\rho^2} + \dots \quad (2)$$

が得られ, これを (1) 式に代入すると, 応力分布は次式で表される.

$$\sigma_y(x) = \sigma_{max} \left[1 + \frac{3+4m}{1+2m} \cdot \frac{x}{\rho} + \frac{3}{2} \cdot \frac{5+6m}{1+2m} \cdot \left(\frac{x}{\rho} \right)^2 + \dots \right] \quad (3)$$

ここで, 最大応力 σ_{max} は

$$\sigma_{max} = \sigma_y(0) = \sigma_\infty(1+2m) \quad (4)$$

である. (3) 式において, x/ρ , $(x/\rho)^2$ の係数はパラメータ m が $1 \sim \infty$ に変化しても大きくは変化しない (2.33~2 程度). 従ってこのことから, x/ρ が小さいときの切欠き底付近の応力分布が, 切欠き荷重 a にはほとんど無関係に, 切欠き底の最大応力 σ_{max} と ρ のみによってほぼ決まることがわかる. このことが線形切欠き力学の背景である.

き裂 ($\rho \rightarrow 0$) 問題の場合, パラメータ ξ は

$$\xi = \frac{(a+x)}{\sqrt{a^2 + \frac{a}{\rho}(2ax+x^2)}} \rightarrow \frac{(a+x)}{\sqrt{\frac{a}{\rho}(2ax+x^2)}} \quad (5)$$

となる. これを (1) 式に代入し $m \rightarrow \infty$ ($\rho \rightarrow 0$) であることを考慮すれば, 無限板中に存在する 1 個のき裂による応力分布の正確な式が導出できる.

$$\sigma_y(x) \rightarrow \sigma_\infty \cdot \frac{m^4 \xi}{m^3} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi x}} \cdot \frac{(1+x/a)}{\sqrt{1+x/(2a)}} \quad (6)$$

ここで, き裂先端付近 ($x/a \ll 1$) に注目すれば次式

$$\sigma_y(x) = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi x}} \quad (7)$$

が導出され, 周知のようなき裂先端付近の弾性応力分布が K_I のみによってほぼ決まることがわかる. このことが線形き裂力学の背景である. また, モード II の場合, 式 (6), (7) 中の応力 $\sigma_y(x)$ を $\tau_{xy}(x)$ に, 応力拡大係数 K_I を K_{II} に書き換えればよい.

以上のように, 一様引張り応力 σ_∞ (または一様せん断応力 τ_∞) を受ける無限板中に 1 個の円孔がある場合の切欠き底付近の応力分布から, 切欠きおよびき裂材の弾性応力分布の特徴が導出できる. 本研究ではこの無限板での応力場の特徴を用い, FEM で得られた有限板での応力分布からモード I やモード II の応力拡大係数を高精度に算出することを試みる.

Fig.1: Elliptical Hole in an Infinite Plate

FEM を用いて実構造物の応力解析を精度よく行うために, 以下の 3 点に従い解析を進める. 解析の概要を模式図 2 に示す.

- (1) 構造物全体を比較的粗いメッシュで解析し, 応力集中部付近で応力の変化が小さい境界 (=第 1 サブ境界) を求める.
- (2) 第 1 サブ境界上の変位を境界条件とする, 応力集中部近傍を取り囲む領域に対し, 詳細なメッシュで解析を行い, 応力集中部により近い領域に新たな境界 (=第 2 サブ境界) を設定する.
- (3) 項目 (2) を第 3, 第 4 サブ境界...と繰り返しながらシステムティックな要素分割を行い, き裂近傍の応力分布を算出する.

Fig.2: Overall Process of FEM Analysis

3 解析結果および検討

図 3(a) はき裂長さ $a=1$ でモード I の荷重を受ける時の、き裂まわりの応力 $\sigma_y(x)$ 分布を示す。ここで、図中には式 (6) で表される無限板中の応力場の厳密解と、式 (7) で表されるき裂先端付近 ($x/a \ll 1$) での第一支配項を、それぞれ実線と破線で示している。図中の e_{min} はき裂先端付近での最小要素の大きさを、 $K_{I,exact}$ は体積力法を用いて求めた対象問題での応力拡大係数 K_I の厳密解である。この図からわかるように、FEM 解析で得られた有限板内のき裂まわりの応力場は、無限板での応力場の厳密解 (式 (6)) と広範囲の x で非常に近い値を示している。すなわち、参照問題である無限板中の応力分布と非常によく似た応力場が、解析対象の有限板内のき裂まわりに生じている。

従って以上の結果を基に、本研究では無限板内におけるき裂問題を参照問題とし、無限板内における応力場の厳密解 (式 (6)) を用いて、解析対象問題である有限板でのき裂の応力拡大係数 K_I (または K_{II}) を算出する。すなわち、FEM 解析で求めた応力分布 $\sigma_y(x)|_{FEM}$ (または $\tau_{xy}(x)|_{FEM}$) を用い、以下の式で応力拡大係数 K_I (または K_{II}) を算出する。

$$\left\{ \begin{array}{l} K_I \\ K_{II} \end{array} \right\} = \frac{\sqrt{2\pi x(1+x/(2a))}}{(1+x/a)} \cdot \left\{ \begin{array}{l} \sigma_y(x)|_{FEM} \\ \tau_{xy}(x)|_{FEM} \end{array} \right\} \quad (8)$$

図 3(b) は式 (8) を用いて求めた応力拡大係数 K_I の相対誤差を表す。この図からわかるように、き裂先端近傍 ($x < 20e_{min}$) から離れた場所の応力分布 $\sigma_y(x)|_{FEM}$ から求めた応力拡大係数 K_I は、体積力法での厳密解との相対誤差が 0.5% 以内に収まる高精度な解を得ている。

図 4 は分割サイズ $e_{min} = 1/243$ での応力結果から求めた、応力拡大係数 K_I の相対誤差を示している。図中には比較のため、通常用いられるき裂先端近傍で第一支配項となる式 (7) を基にして、次式

$$K_I = \sqrt{2\pi x} \sigma_y(x)|_{FEM} \quad (9)$$

で求めた応力拡大係数 K_I の相対誤差も○印で示している。き裂先端から離れるに従い、式 (9) により求めた K_I の相対誤差は急激に増加する。一方、無限板中の応力場の厳密解を用いて求めた K_I の相対誤差は、き裂先端からの距離 x にはば無関係に一定で高精度 (0.2% 以内の誤差) である。また、式 (8) による誤差の大きさは同じ分割サイズ e_{min} であればき裂長さに依存しないことがわかる。(結言、参考文献省略)。

(a) Distribution of Stress σ_y

(b) Relative Errors of Stress Intensity Factor K_I

Fig.3: Comparisons of σ_y and Relative Error of K_I under Different Mesh Size e_{min}

Fig.4: Comparisons of Relative Error of K_I Obtained by Different Estimate Equation (8) and (9)