P003 三次元ピエゾ接合体の特異性のオーダーに対する接合端部角度の影響

Influence of the angle of corner on the order of stress singularity in three-dimensional piezoelectric joints

正 古口 日出男 (長岡技科大) ○ 学 浮須 和樹 (長岡技科大)

Hideo Koguchi, Nagaoka University of Technology, 1603-1 Kamitomioka, Nagaoka, Niigata

Kazuki Ukisu, Graduate School of Nagaoka University of Technology, 1603-1 Kamitomioka, Nagaoka, Niigata

The 3DFEM of piezoelectric joints is presented. The influence of the angle of corner on the order of stress singularity in the case of Three-dimensional corner shape of having various angles, various piezoelectric joints angle and various piezoelectricity poled directions, is analyzed in this paper. The eigen equation determining the stress singular order and, the stress, displacement and electric displacement fields near the interface are deduced in details.

Key Words: Piezoelectric joint, Singularity order, 3D FEM

1. 緒言

近年, 構造部材としてスマートマテリアルの役割をはたすピエゾ素子を用いられ始めている. 従来であればセンサ部とアクチュエータ部が必要な制御において, スマートマテリアルを用いると素子がひとつですみ, 制御系の単純化がはかれる. 先ほど述べたピエゾ素子は力を電気に, 電気を力に双方向に変換できるため, 電車の車軸などに取り付け振動エネルギーを電気エネルギーに変換し振動を抑えるために用いる場合や, 建物の構造部材として用いて弾性波を検出し構造の評価などに用いられる.

一般的に構造体は金属であることが多くピエゾ素子はセラミックスであることが多い. したがってこれらの異材接合体は材料特性の違いによる応力特異性が接合端部近傍に生じこれらによる接合体の強度および信頼性の低下が実用上の問題となることが考えられる. このことから境界要素法や有限要素法などの数値計算により, 異材接合体の接合界面近傍の特異応力場を高精度に解析することが重要となる.

そこで本研究では, 三次元ピエゾ接合体の接合端部角度が特異性オーダーに与える影響を3次元有限要素法により解析を行った.

2. 固有値解析の有限要素法

2. 1 構成方程式

ピエゾ素子における構成方程式は以下のように与えられる.

$$\sigma_{ij} = c_{ijkl} \varepsilon_{kl} - e_{kij} E_k \quad (1)$$

$$d_i = e_{ikl} \varepsilon_{kl} + \gamma_{ik} E_k \quad (2)$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{j,i} + u_{i,j}) \quad (3)$$

$$E_i = -\psi_{,i} \quad (4)$$

ここで σ_{ij} , D_i は応力と電束密度, ε_{ij} , E_i は歪と電場, u_i と ψ は変位と電位関数であり, c_{ijkl} , e_{kij} , γ_{ik} はそれぞれ弾性定数, 圧電定数, 誘電率である.

(1), (2)式をまとめると以下ようになる.

$$\begin{Bmatrix} \sigma \\ d \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{c} & \mathbf{e} \\ \mathbf{e} & -\gamma \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon \\ -E \end{Bmatrix} \quad (5)$$

2. 2 3次元有限要素解

図1に点oで特異性を有する球座標系 (r, θ, ϕ) を示す. これは, 点oを頂点として8節点の要素により四角錐状に分割される. 要素中における点Pは, 特異性オーダー $\lambda = p-1$ を考慮し以下の式の関係によって局所座標と関連付けられる.

$$r = r_0 \left(\frac{1+\alpha}{2} \right)^{1/p}, \rho = \frac{r}{r_0} = \left(\frac{1+\alpha}{2} \right)^{1/p} \theta = \sum_{i=1}^8 H_i \theta_i, \phi = \sum_{i=1}^8 H_i \phi_i \quad (6)$$

ここで

$$\begin{aligned} H_1 &= -\frac{1}{4}(1-\eta)(1-\xi)(\eta+\xi+1), & H_2 &= \frac{1}{2}(1-\eta)(1-\xi^2) \\ H_3 &= \frac{1}{4}(1-\eta)(1+\xi)(-\eta+\xi-1), & H_4 &= \frac{1}{2}(1-\eta^2)(1+\xi) \\ H_5 &= \frac{1}{4}(1+\eta)(1+\xi)(\eta+\xi-1), & H_6 &= \frac{1}{2}(1+\eta)(1-\xi^2) \\ H_7 &= \frac{1}{4}(1+\eta)(1-\xi)(\eta-\xi-1), & H_8 &= \frac{1}{2}(1-\eta^2)(1-\xi) \end{aligned} \quad (7)$$

変位と電位関数は次の式で書き表すことが出来る.

$$\bar{\mathbf{u}} = (\mathbf{u} - \mathbf{u}_0) = \rho^p \left[\sum_{i=1}^8 H_i \bar{\mathbf{u}}_i \right] \quad (8)$$

$$\bar{\psi} = (\psi - \psi_0) = \left(\frac{1+\alpha}{2} \right)^p \left[\sum_{i=1}^8 H_i (\psi_i - \psi_0) \right] = \rho^p \left[\sum_{i=1}^8 H_i \bar{\psi}_i \right] \quad (9)$$

また, 球座標でのヤコビ行列は以下に示すとおりである.

$$[\mathbf{J}] = \begin{bmatrix} \frac{\partial r}{\partial \alpha} & \frac{\partial \theta}{\partial \alpha} & \frac{\partial \phi}{\partial \alpha} \\ \frac{\partial r}{\partial \xi} & \frac{\partial \theta}{\partial \xi} & \frac{\partial \phi}{\partial \xi} \\ \frac{\partial r}{\partial \eta} & \frac{\partial \theta}{\partial \eta} & \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{r_0}{2p} \rho^{1-p} & 0 & 0 \\ 0 & \sum_{i=1}^8 H_{i,\xi} \theta_i & \sum_{i=1}^8 H_{i,\xi} \phi_i \\ 0 & \sum_{i=1}^8 H_{i,\eta} \theta_i & \sum_{i=1}^8 H_{i,\eta} \phi_i \end{bmatrix} \quad (10)$$

Fig. 1 Definition of the finite element geometry and natural co-ordinates at a free-edge singular point

ここで半径座標と角度座標の間に何の依存性もないため次のようにあらわすことができる。

$$[J_1] = \begin{bmatrix} \frac{\partial \theta}{\partial \xi} & \frac{\partial \phi}{\partial \xi} \\ \frac{\partial \theta}{\partial \eta} & \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^8 H_{i,\xi} \theta_i & \sum_{i=1}^8 H_{i,\xi} \phi_i \\ \sum_{i=1}^8 H_{i,\eta} \theta_i & \sum_{i=1}^8 H_{i,\eta} \phi_i \end{bmatrix} \quad (11)$$

これらの式から歪、電場と変位、電位関数の関係は以下のよう求められる。

$$\begin{Bmatrix} \epsilon \\ -E \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^8 [B_i] \begin{Bmatrix} \bar{u}_i \\ -\psi_i \end{Bmatrix} = [B] \bar{U} \quad (12)$$

$$[B] = \frac{1}{r_0} \rho^{p-1} (p[B_a] + [B_b]) \quad (13)$$

仮想仕事の原理を適用し全体についてたしあわせると以下の式ようになる。

$$(p^2[A] + p[B] + [C]) \bar{U} = 0 \quad (16)$$

これより以下の式が求められる

$$[S] \begin{Bmatrix} V \\ U \end{Bmatrix} = p \begin{Bmatrix} V \\ U \end{Bmatrix}, [S] = \begin{bmatrix} -[A]^{-1}[B] & -[A]^{-1}[C] \\ I & 0 \end{bmatrix} \quad (18)$$

上式を固有値解法を用いて解くことにより特性方程式の固有値として p より特異性オーダー λ が得られる。

3. 解析

2章の理論に基づき作成したプログラムを用いてピエゾ接合体の接合角度が特異性に与える影響を解析するために種々のモデルについて解析を行った。その解析モデルの一例を図2; 図3に示す。図2に示したモデルはAlの構造物端部にPZTを接合したピエゾ接合体で、接合界面からPZT表面までの角度を θ_1 とする。図3に示したモデルは、Al構造物表面にPZTを接合したピエゾ接合体で、図2の場合と同様に接合界面からPZTの表面までの角度を同様に θ_1 とする。PZTの極方向はx軸方向に沿った向きをとった。各々の点0における特異性オーダーの解析を3DFEMを用いて行った。その解析結果を図4、図5に示す。

解析に用いたPZTとAlの材料定数は表1に示す通りである。

4. 結論

種々のピエゾ接合体の接合角度等が特異性オーダーに与える影響を解析することが出来た。今後は求められた特異性オーダーをBEMなどに用いて応力分布解析を行いピエゾ接合体の応力場解析などを行う。

5. 参考文献

- (1) Pageau, S. S and Biggers, S. B. Jr, 'Finite element evaluation of free-edge singular stress fields in anisotropic materials', Int. J. Num. Meth. Engng, vol. 38, (1995)pp2225-2239
- (2) Wan, H. T., Sze, K. Y., Yang, X. M., 'Analysis of electromechanical stress singularity in piezoelectrics by computed eigen solutions and hybrid-trefftz finite element models', Comput. Mech, vol. 38(2006), pp. 551-564
- (3) Allik, H., and Hughes, T. J. R., 'Finite element method for piezoelectric vibration', Int. J. Num. Meth. Engng, vol. 2(1970), pp. 151-157
- (4) 田中哲郎, 岡崎清, 一ノ瀬昇 圧電セラミック材料 学献社, 1973.
- (5) 村本 隆 '3次元接合体の応力得意場の解析'長岡技術科学大学修士課程工学研究科修士論文, (1996)

Table1. Material property

	C11 (GPa)	C33 (GPa)	C12 (GPa)	C13 (GPa)	C44 (GPa)	C66 (GPa)
PZT	139	113	77. 8	74. 3	25. 6	30. 6
Al	104	104	51. 1	51. 1	26. 3	26. 3

	e31 (C/m2)	e33 (C/m2)	e15 (C/m2)	Y 11 (pC/Vm)	Y 33 (pC/Vm)
PZT	-6. 98	13. 84	13. 44	6000	5470

Fig.2 Model 1 of piezoelectric joint

Fig.3 Model 2 of piezoelectric joint

Fig.4 Result of model 1

Fig.5 Result of model 2