P012 部分的に埋め込まれた剛体丸棒によりねじりを受ける無限弾性厚板の応力特異性

Stress Singularity of an Infinite Elastic Thick Plate Subjected to Torsion by an Embedded Rigid Cylinder

○学 林 直樹 (明治大[院])

正 長谷川久夫 (明治大)

Naoki HAYASHI and Hisao HASEGAWA, Meiji University, 1-1-1 Higashimita, Tamaku, Kawasaki 214-8571

This paper deals with the stress singularity problem of an infinite elastic thick plate subjected a torsional displacement by a circular rigid cylinder embedded in the plate. It is assumed that the end face of the cylinder is bonded to the bottom plane of the circular hole of the plate, and the circumferential surfaces are free from surface forces. A body force distribution method is used to investigate the problem. The stress distributions on the interface and the order of stress singularity are shown.

Key Words: Elasticity, Torsion, Thick Plate, Body Force Distribution Method, Stress Singularity

1. まえがき

本報告は、非貫通円孔をもつ無限弾性厚板が、円孔に挿入された剛体丸棒により、ねじり変位を受けるときの応力集中問題を三次元弾性理論により考察したものである。剛体丸棒の端面と円孔底の界面は完全に接着されているが、丸棒と円孔の円周面は非接着でかつ摩擦もないものとした。このとき、円孔角部の応力特異性指数は $\lambda = 2/3$ であることが知られている⁽¹⁾。円孔底だけでなく円周面も剛体丸棒と接着されている場合(Lucoの問題)には、 $\lambda = 1/3$ であることが知られている⁽²⁾。これらの問題において円孔の深さが零の場合(Reissner-Sagociの問題)では、 $\lambda = 1/2$ である⁽³⁾。また、貫通円孔の任意の深さまで剛体丸棒が挿入されている場合は、丸棒底部角部との接触部に $\lambda = 1/2$ の特異性が表れることが知られている⁽⁴⁾。

本報告では解法として物体力分布法⁽⁵⁾を採用する。そのため、ねじり物体力の働く無限弾性厚板問題の新しいグリーン関数⁽⁶⁾を応用する。数値計算を実行して剛体丸棒近傍の応力分布を示し、角部の応力特異性指数が $\lambda = 2/3$ となることを確認する。

2. 境界条件

非貫通円孔に剛体丸棒が挿入された無限弾性厚板に円柱座標 (r, θ, z) を図1のようにとる。厚板の横弾性係数を μ 、厚さを H 、剛体丸棒と円孔半径を c 、円孔深さを $H - B$ とする。剛体丸棒と円孔は端面 $(z = H, 0 \leq r < c)$ において接着されていて、円周面 $(r = c, B < z \leq H)$ では摩擦なくすべりが許されているものとする。剛体丸棒が z 軸まわりに角度 ω ねじられるとき、本問題の境界条件はつぎのように表される。

Fig.1 An infinite elastic thick plate subjected to torsion by a rigid cylinder

- (i) $r = c, B \leq z \leq H; \tau_{r\theta} = \tau_{rz} = \sigma_r = 0$
- (ii) $z = B, 0 \leq r < c; u_z = \omega r$
- (iii) $z = H, c \leq r < \infty; \sigma_z = \tau_{z\theta} = \tau_{rz} = 0$
- (iv) $z = 0, 0 \leq r < \infty; \sigma_z = \tau_{z\theta} = \tau_{rz} = 0$

本問題は軸対称ねじり問題であるから、変位はねじれ変位 u_z ,

応力は $\tau_{r\theta}, \tau_{z\theta}$ のみで、他の変位と応力の成分は常に零である。

3. グリーン関数

無限弾性厚板問題のねじり物体力問題のグリーン関数は、厚板内の一円周 $(r = a, z = b)$ 上にねじり物体力が存在し、厚板表面において表面力が働かないときの解として定義される。ここではこのグリーン関数を次式により表す。

$$u_z'' = u_z''(r, z, a, b), \quad \tau_{r\theta}'' = \tau_{r\theta}''(r, z, a, b), \quad \tau_{z\theta}'' = \tau_{z\theta}''(r, z, a, b) \quad (2)$$

本報告では、ねじり物体力が厚板内の一円周上ではなく、一円筒面 $(r = a, b_1 \leq z \leq b_2)$ および一円環状面 $(a_1 \leq r \leq a_2, z = b)$ 上に存在するときの解を新しいグリーン関数として採用する。この新しいグリーン関数を次式のように表す。

(i) 円筒面要素上にねじり物体力が存在する場合：

$$u_{zb} = u_{zb}(r, z, a, b_1, b_2), \quad (3)$$

$$\tau_{r\theta b} = \tau_{r\theta b}(r, z, a, b_1, b_2), \quad \tau_{z\theta b} = \tau_{z\theta b}(r, z, a, b_1, b_2)$$

(ii) 円環状面要素上にねじり物体力が存在するとき：

$$u_{za} = u_{za}(r, z, a_1, a_2, b), \quad (4)$$

$$\tau_{r\theta a} = \tau_{r\theta a}(r, z, a_1, a_2, b), \quad \tau_{z\theta a} = \tau_{z\theta a}(r, z, a_1, a_2, b)$$

これらのグリーン関数は式(2)を積分すれば得られる。

4. 解法

図2中の二点鎖線 L は無限弾性板内に想定した円孔の境界となる面、破線 Γ は物体力の分布面である。面 L が境界条件を満たすように面 Γ 上の物体力の大きさを定めることが本解法の原理である。

Fig.2 A boundary L and a plane Γ of distribution of body forces imagined in an infinite elastic plate

面 Γ 上にねじり物体力を分布させたとき、厚板内に生じる変位と応力を次式のように表すことができる。

$$\begin{Bmatrix} u_z \\ \tau_{r\theta} \\ \tau_{z\theta} \end{Bmatrix} = \int_{\Gamma} f_2(\Gamma) \begin{Bmatrix} u_z'' \\ \tau_{r\theta}'' \\ \tau_{z\theta}'' \end{Bmatrix} d\Gamma \quad (5)$$

ここに $f_2(\Gamma)$ は分布させた物体力の大きさ、右辺の変位と応力の式は式(2)のグリーン関数である。式(5)に境界条

件式 (1) の条件 (i), (ii) を適用すれば次式を得る。

$$\begin{aligned} & (i) r = c, B \leq z \leq H; \\ & 0 = \int_{\Gamma} f_2(\Gamma) (\tau_{r\theta}^*) d\Gamma \\ & (ii) z = B, 0 \leq r < c; \\ & \omega r = \int_{\Gamma} f_2(\Gamma) (u_2'') d\Gamma \end{aligned} \tag{6}$$

式 (6) は積分方程式である。これを連立一次方程式に帰着させてとくため、物体力の大きさを M 個、N 個の階段状の荷重で近似しその大きさを f_{2a}^m, f_{2b}^n で表せば次式を得る。

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{m=1}^M f_{2a}^m \tau_{r\theta a} + \sum_{n=1}^N f_{2b}^n \tau_{r\theta b}, (B \leq z \leq H) \\ \omega r &= \sum_{m=1}^M f_{2a}^m u_{2a} + \sum_{n=1}^N f_{2b}^n u_{2b}, (0 \leq r < c) \end{aligned} \tag{7}$$

式 (7) には M, N 個の任意定数 (物体力の大きさ) があるから、円孔の境界となる面 L に M, N 個の観測点を選べば、式 (7) から (M+N) 元連立一次方程式を構成できる。それを解いて物体力の大きさを定めれば、式 (5) から変位と応力が求められる⁽⁷⁾。

5. 数値結果と考察

上述の解法に基づいて数値計算を実行した。結果の一部を図 3～8 に示す。

Fig.3 Distribution of the displacement u_2 near the edge

Fig.4 Distribution of the stress $\tau_{r\theta}$ near the edge

Fig.5 Distribution of the stress $\tau_{z\theta}$ near the edge

Fig.6 Distribution of the stress $\tau_{r\theta}$ near the edge

Fig.7 Distribution of the stress $\tau_{z\theta}$ near the edge

Fig.8 Order λ near the edge ($r=c$ or $z=B$)

本問題のように丸棒が剛体で与えられる場合、応力特異性の指数 λ の値は $\lambda = 2/3$ で与えられる。図 8 より観測点の個数が大きくなるに従い、つまり $1/(N+M)$ の値が小さくなるにしたがって λ の値がそれぞれ $\lambda = 2/3$ の値へと収束していくことがわかる。

文献

- (1) Murakami, Y., Stress Intensity Factors Handbook, Vol.3(1992), Pergamon Press, 1007.
- (2) Luco, J.E., J. Appl. Mech., 43-3(1976), 419.
- (3) Reissner, E. and Sagoci, H.F., J. Appl. Physics, 15-9(1944), 652.
- (4) 笠野・松本, 日本接着協会誌, 21-9(1985), 378
- (5) 長谷川, 弾性数理解析とその応用 (渡辺・ほか 2 名編), (2007), 養賢堂, 30.
- (6) 林・長谷川, 機論, A, 69-688(2003), 1761.
- (7) 林・長谷川, 機構論 (年次大会 2006), (2006), 809