圧電複合平板における熱応力の線形最適制御

Linear Optimum Control of Thermal Stress in a Piezoelectric Composite Disk

○ 芦田 文博・島根大学

Fumihiko ASHIDA, Shimane University

坂田 誠一郎・島根大学

Sei-ichiro SAKATA, Shimane University

Key Words: Thermal Stress, Stress Control, Piezoelectric Actuation, Composite Disk, Linear Programming

本報告では、構造材料層に複数の圧電セラミックス層が接着された多層複合平板において、構造材料層に軸対称熱負荷が作用した場合、各圧電セラミックス層に配置された数個の電極にそれぞれ適当な電位差を印加することによって、構造材料層に生じた最大熱応力を最小にする問題を解析している。重ね合わせの原理を適用することによって、この非線形最適化問題を線形最適化問題に帰着し、各電極に印加する電位差を求めた。さらに、最大熱応力を制御する効果が最高になるように、圧電セラミックス層における電極の配置を決定した。

1. はじめに

スマート構造物に関する力学的研究は 1990 年代から盛んに行われて来ている。圧電材料はセンサとアクチュエータの両方の機能を発現できるために、スマート構造部の要素材料として重要視されており、これまで圧電材料を利用した構造物の熱弾性問題が数多く解析されている⁽¹⁾。圧電効果による構造物の制御については変位制御を扱った研究に注目が集まっており、著者らの知識の範囲内において、応力制御を扱った研究は著者らの論文⁽²⁾が報告されているのみである。この論文⁽²⁾において、横等方性構造材料層と結晶族 6mm の圧電セラミックス層で構成された複合平板を対象に、構造材料層の熱応力は圧電効果によって制御できることが示された。本報告では、先の研究を拡張し、熱応力の制御効果が最高になるように電極の配置を決定し、最大熱応力の抑制率について検討している。

2. 問題設定

図 1 に示すように、1 つの横等方性構造材料層の上に N 個の結晶族 6mm に属する圧電セラミックス層が接着された多層複合平板を考える。各圧電セラミックス層の上の表面には同心円状に M 個の電極が配置されている。層は下から $0, 1, \dots, N$ 、また電極は中心から $1, 2, \dots, M$ と番号を付ける。なお、解析において、層間の接着層や電極の存在を無視し、完全接着を仮定する。また、この複合平板に外力の作用はなく、円周面において半径変位が拘束されているものとする。さらに、各圧電セラミックス層の下

表面は接地され、円周面に電荷は作用しないと仮定する。以下、 i 番目の層に関する量は相当する記号に添字 i を付けて表すことにする。

2-1 熱弾性問題 図 1 に示した複合平板において、下の自由表面に軸対称媒質加熱 $T_0 f(r)$ が作用した場合を考える。

$$z=0 \quad T_{0,z} - h_0 T_0 = -h_0 T_0 f(r) \quad (1)$$

ただし、 T_i は i 番目の層における温度変化、 h_i は自由表面における相対熱伝達率、 $T_{0,z} = \partial T_0 / \partial z$ である。また、上の自由表面からは熱放散が生じ、円周面は断熱され、各圧電セラミックス層の上の表面に電荷が作用しないと仮定する。

熱的境界条件の下にフーリエの熱伝導方程式を解くことによって、各層の温度変化 T_i が得られる。次に、著者らが提案したポテンシャル関数法⁽²⁾を適用することによって、各層の変位 u_{ij}^T 、応力 σ_{ijk}^T 、電位 Φ_i^T 及び電束密度 D_{ij}^T を導くことができる。なお、上添字 T の付いた記号は媒質加熱によって惹起された量である。

2-2 電気弾性問題 各圧電セラミックス層の上の表面に次のような電位差分布が印加された場合を考える。

$$z=b_i \quad \Phi_i^E = \sum_{k=1}^M V_{ik} \{H(r-r_k+w_k) - H(r-r_k)\}, \quad (i=1 \sim N) \quad (2)$$

ただし、 V_{ik} は i 番目の層の k 番目の電極 ($(i-k)$ 番目の電極) に印加された電位差であり、 $H(r)$ はヘビサイドのステップ関数、 r_k は k 番目の電極の外半径、さらに上添字 E の付いた記号は印加電位差によって誘起された量である。

本問題では、構造材料層に生じた最大熱応力が最小になるように、各電極の印加電位差 V_{ik} を決定するのが目的である。初めに、単位電位差 V_u が $(n-m)$ 番目の電極にのみ作用した場合を考え、 V_u によって i 番目の層に誘起される量を $(u_{ij}^E)_{nm}$ 、 $(\sigma_{ijk}^E)_{nm}$ 、 $(\Phi_i^E)_{nm}$ 及び $(D_{ij}^E)_{nm}$ と表す。これらの量はポテンシャル関数法⁽²⁾を適用することによって導くことができる。次に、ある大きさの電位差が $(n-m)$ 番目の電極に作用した場合、その電位差を $V_{nm} = P_{nm} V_u$ と表すことにする。ただし、 P_{nm} は作用した電位差の大きさを表す倍率係数である。さて、全ての電極にそれぞれ任意の大きさの電位差が作用した場合、 i 番目の層に生じる量は

Fig. 1 Geometry of a composite disk.

$$\begin{aligned} & \{u_{ij}^E, \sigma_{ijk}^E, \Phi_i^E, D_{ij}^E\} \\ &= \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M P_{nm} \{ (u_{ij}^E)_{nm}, (\sigma_{ijk}^E)_{nm}, (\Phi_i^E)_{nm}, (D_{ij}^E)_{nm} \} \end{aligned} \quad (3)$$

と表される. なお, $(u_{ij}^E)_{nm}$, $(\sigma_{ijk}^E)_{nm}$, $(\Phi_i^E)_{nm}$ 及び $(D_{ij}^E)_{nm}$ は前もって計算し, データベース化できる.

2-3 熱応力の制御 図 1 に示した複合平板に式 (1) の熱的負荷と式 (2) の電氣的負荷が同時に作用した場合, 複合平板に生じる量は, それぞれの負荷によって生じた量を重ね合わせて, 次のように表される.

$$\{u_{ij}, \sigma_{ijk}, \Phi_i, D_{ij}\} = \{u_{ij}^T, \sigma_{ijk}^T, \Phi_i^T, D_{ij}^T\} + \{u_{ij}^E, \sigma_{ijk}^E, \Phi_i^E, D_{ij}^E\} \quad (4)$$

なお, 上添字のない記号は両負荷によって生じた量を表す.

さて, 構造材料層の最大熱応力が最小になるように印加電位差 V_{ik} を決定する問題を考える. 著者らは先の報告⁽²⁾で, 非線形最適化問題を直接解いて電位差を決定したが, 解の探索過程において局所的最適解に陥り易く, 大域的最適解を得る事は困難であった. そこで, 電位差を印加する前と後における構造材料層の最大応力 $\sigma_{0\max}^T$ と $\sigma_{0\max}$ との比を最適化変数として導入する.

$$R_s = \sigma_{0\max} / \sigma_{0\max}^T \quad (5)$$

この比 R_s と倍率係数 P_{nm} を用いることによって, 圧電セラミックス層の応力に制約条件を設けた場合の非線形最適化問題を線形最適化問題に帰着することができる.

$$\left. \begin{aligned} & \text{find} \quad X = \{P_{11}, P_{12}, \dots, P_{nm}, R_s\}^T \\ & \text{to minimize} \quad f_{obj}(X) = R_s \sigma_{0\max}^T \\ & \text{subject to} \quad \left\{ \begin{aligned} & \{|\sigma_{0rr}|, |\sigma_{0\theta\theta}|, |\sigma_{0zz}|, |\sigma_{0rz}|\} \leq R_s \sigma_{0\max}^T, \\ & \sigma_{pc}^A \leq \{\sigma_{irr}, \sigma_{i\theta\theta}, \sigma_{izz}\} \leq \sigma_{pt}^A, \\ & -\sigma_{ps}^A \leq \sigma_{irz} \leq \sigma_{ps}^A \end{aligned} \right\} \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

ここで, σ_{pt} , σ_{pc} 及び σ_{ps} は電位差を印加した後における圧電セラミックス層の最大引張, 圧縮及びせん断応力で, σ_{pt}^A , σ_{pc}^A 及び σ_{ps}^A は圧電セラミックス層の許容応力である.

3. 数値結果

便宜上, 数値結果を次の無次元量で表す.

$$\begin{aligned} & (\bar{r}, \bar{z}, \bar{c}_i, \bar{b}_i, \bar{q}_k, \bar{w}_k) = (r, z, c_i, b_i, q_k, w_k) / a, \\ & \bar{V}_{ik} = |d_i| V_{ik} / (a \tilde{\alpha}_r T_c), \quad \bar{\sigma}_{ijk} = \sigma_{ijk} / (\tilde{\alpha}_r \tilde{Y}_r T_c) \end{aligned} \quad (7)$$

ここで, T_c は一定な温度, $\tilde{Y}_r$ と $\tilde{\alpha}_r$ は構造材料層の縦弾性係数と線膨張係数, さらに d_i は圧電セラミックス層の圧電率である. 数値計算は, 横等方性 CFRP 層とセレン化カドミウム層で構成された複合平板⁽²⁾ について行った. このとき, 構造材料層に作用する媒質加熱分布は次式で与えられるものと仮定した.

$$f(\bar{r}) = H(\bar{r} - \bar{r}_o)(1 - 2\bar{r}^2/\bar{r}_o^2 + \bar{r}^4/\bar{r}_o^4) \quad (8)$$

ここで, $\bar{r}_o$ は媒質加熱領域の半径であり, $\bar{r}_o = 0.5$ とした. また, 層の厚さ, 自由表面におけるピオ数, 圧電セラミックス層の許容応力は次のように与えた.

$$\begin{aligned} & \bar{c}_0 = 0.002, \quad \bar{c}_i = 0.02/N, \quad B_0 = 1.0, \quad B_N = 0.1, \\ & \bar{\sigma}_{pt}^A = 0.004, \quad \bar{\sigma}_{pc}^A = -0.04, \quad \bar{\sigma}_{ps}^A = 0.002 \end{aligned} \quad (9)$$

また, 最大熱応力の抑制率を次のように定義する.

$$R = (1 - R_s) \times 100 [\%] \quad (10)$$

電極の数, 幅及び配置をパラメータに式 (6) の線形最適化問題を解いて, 電極の設計を行った. 圧電セラミックス

層が 4 層の場合, 抑制率 R は電極が 3 個でそれらの寸法が

$$\bar{q}_1 = 0, \bar{w}_1 = 0.4, \bar{q}_2 = 0.125, \bar{w}_2 = 0.1, \bar{q}_3 = 0.025, \bar{w}_3 = 0.35$$

のとき最大となり, 印加電位差は次の通り決定された.

$$(\bar{V}_{11}, \bar{V}_{12}, \bar{V}_{13}) = (0.189, 0.054, 0.074) \times 10^{-3}$$

$$(\bar{V}_{21}, \bar{V}_{22}, \bar{V}_{23}) = (0.210, -0.057, -0.065) \times 10^{-3}$$

$$(\bar{V}_{31}, \bar{V}_{32}, \bar{V}_{33}) = (0.231, -0.050, -0.067) \times 10^{-3}$$

$$(\bar{V}_{41}, \bar{V}_{42}, \bar{V}_{43}) = (0.223, -0.042, -0.067) \times 10^{-3}$$

上記の電位差を印加する前と後の円周応力分布を図 2 と 3 に示す. これらの図より, 電位差を印加することによって構造材料層の熱応力が抑制されていることが分る. 一方, 圧電セラミックス層の応力は増大したが, 式 (9) に示した引張応力と圧縮応力の制約値の範囲内に留められている. なお, この場合の最大熱応力の抑制率は 33.7% であり, 前報⁽²⁾ に示した 5 個の電極が等間隔に配置された場合の抑制率に比べると約 2 倍になった.

Fig. 2 Hoop stress distributions before applying voltages.

Fig. 3 Hoop stress distributions after applying voltages.

参考文献

- (1) Ashida, F., Thermoelasticity of Piezoceramics and Simulation of a Smart Structure, *Trans. JSME, Series A*, Vol.73, No.725 (2007), pp.1-9.
- (2) Ashida, F., Sakata, S. and Matsumoto, K., Control of Thermal Stress in a Piezo-Composite Disk, *Journal of Thermal Stresses* Vol.30 (2007), pp.1025-1040.