衝撃 SH 波の移動境界での反射

Reflection of an Impulsive SH-wave at a Moving Edge

正 渡辺一実(山形大)

Kazumi WATANABE, Yamagata University, Yonezawa, Yamagata 992-8510

Wave reflection at a moving surface edge of an elastic solid is discussed. Assuming a uniform edge motion and no additional disturbance due to the motion, an exact closed form solution for reflected SH-waves is obtained. Its solution procedure is slightly different from the standard Cagniard-de Hoop technique, but time-development of wave front shape is extracted exactly. In addition to the regular reflected wave, a pulse-like wave is found. It appears when a ray with a critical incident angle hits the moving edge and has a flat front. It is also shown that an imaginary source of the reflected wave is stationary, in spite of the reflector (edge) motion.

Keywords: Wave reflection, Moving edge, Impulse, Transient SH-wave, Exact solution, Cagniard-de Hoop technique

1. はじめに

ドプラー効果は、1)静止震源の場合には移動観測点の応答に、2)移動震源の場合には静止観測点の応答に、3)移動反射壁の場合には反射波に生じる。特に、第3の移動壁によるドプラー効果は電磁波の分野では飛行物体の速度計測の重要な計測原理となっている。移動壁による弾性波のドプラー効果に関する研究は著者の最近の研究[1-3]以外には見あたらない。しかも調和波が研究対象であり、衝撃波に関する研究は全く見当たらない。しかしながら、点震源から生じた衝撃弾性波の移動境界からの反射は最も基本的な波動現象であり、この波動現象を明らかにする意義は少なくない。

2. 問題設定

Fig. 1 Moving edge of a semi-infinite solid.

図1に示すように、無限弾性体中の点震源から生じた衝撃 SH 波の移動境界での反射を解析する。座標原点に震源があり、初期($t=0$)の境界は $x=l$ 、そして時刻 t の経過とともに速度 V で x 軸正方向に移動する。

衝撃震源を持つ SH 波の波動方程式は

$$\frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} = \frac{1}{c_s^2} \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} - \frac{Q}{c_s^2} \delta(x) \delta(y) \delta(t) \quad (1)$$

この波動方程式を移動境界での応力自由条件、

$$\sigma_{xz} = 0; \text{ at } x = Vt + l \quad (2)$$

と無限遠方での収束条件

$$u_z \rightarrow 0; \quad x \rightarrow -\infty \quad (3)$$

を満足するように解を求める。

3. 厳密解と波面

解は震源から生じた入射波 u_{inc} と移動壁での反射波 u_{refl} の和、

$$u_z(x, y, t) = u_{inc}(x, y, t) + u_{refl}(x, y, t) \quad (4)$$

として表され、震源からの入射波は波動方程式の特解であり、簡単な表示式

$$\frac{2\pi c_s}{Q} u_{inc}(x, y, t) = \frac{H(c_s t - \sqrt{x^2 + y^2})}{\sqrt{(c_s t)^2 - (x^2 + y^2)}} \quad (5)$$

となる。反射波は多少複雑な数式計算の後に Cagniard 法を適用して求めた厳密解が初等関数で表示される。

(a) Incident wave catches up to the moving edge.

(b) Incident wave touches the imaginary source of the reflected wave.

(c) An incident ray with critical angle hits the moving edge.

$$\begin{aligned} & \frac{2\pi c_s}{Q} u_{\text{refl}}(x, y, t) \\ &= H\left(c_s t - Mx - \sqrt{(my)^2 + Z^2}\right) \frac{mR((c_s t - Mx)/m)}{\sqrt{(c_s t - Mx)^2 - \{(my)^2 + Z^2\}}} \\ &+ \frac{2\pi M}{m^2} H(M|y| - (Vt + 2l - x)) \delta(c_s t - |y| - 2Ml/m^2) \end{aligned} \quad (6)$$

ここに,

$$\begin{aligned} R(u) &= \frac{u^2 - M^2\{(Z/m)^2 + y^2\} - y^2}{\{u - M(Z/m)\}^2 - (my)^2} \\ Z &= Vt + 2l - x = M(c_s t) + 2l - x \\ m &= \sqrt{1 - M^2}, \quad M = V/c_s \end{aligned} \quad (7)$$

この結果、円形波面の入射波と反射波に加えて、直線の波面を持ちデルタ関数のパルスとなる波の発生が判明した。図2に波面方程式(8)の時間発展を示す。

$$\text{入射波: } W_{\text{inc.}}: (c_s t)^2 = x^2 + y^2 \quad (8a)$$

$$\text{反射波: } W_{\text{refl.}}: \left(c_s t - \frac{2lM}{m^2}\right)^2 = \left(x - \frac{2l}{m^2}\right)^2 + y^2. \quad (8b)$$

$$\text{パルス波: } W_{\text{pulse}}: c_s t = |y| + \frac{2Ml}{m^2}. \quad (8c)$$

参考文献

- [1] K. Watanabe, IJES (to be published)
- [2] K. Watanabe & S. Biwa, Acta Mech., 2008.
- [3] K. Watanabe, QJMAM, 2010

(d) Moving edge passed through the imaginary source.

Fig.2 Wave front patterns for the case of the positive Mach number