エアリの応力関数を利用した円孔周辺部における 主応力和測定データの応力分離

米山 聡^{*1}, 有川 秀一^{*1}, 芝山 貴之^{*2}

Stress Separation of Measured Isopachics Around a Hole Utilizing Airy Stress Function

Satoru YONEYAMA^{*3}, Shuichi ARIKAWA and Takayuki SHIBAYAMA

^{*3}Aoyama Gakuin University, Department of Mechanical Engineering
5-10-1 Fuchinobe, Sagami-hara 252-5258, Japan

A method for evaluating stress components from interferometrically measured isopachics using Airy stress function is proposed in this study. A Poisson equation that represents the relationship between the sum of principal stresses and an Airy stress function is solved using a finite element method. The Dirichlet boundary condition for solving the Poisson equation is determined by the approximation of an assumed Airy stress function along the boundary of the model. Therefore, the distribution of the Airy stress function is obtained from the measured isopachic contours. Then, the stresses are obtained from the computed Airy stress function. The effectiveness of the proposed method is validated by an experiment. Results show that the stress separation of isopachics around a hole is possible by the proposed method.

Key Words : Stress Separation, Isopachics, Sum of Principal Stresses, Finite Element Method, Mach-Zehnder Interferometry, Optical Methods, Experimental Stress Analysis

1. 緒 論

マッハ・ツェンダー干渉計やトワイマン・グリーン干渉計など、板の厚さや面外の変位を測定する干渉光学系は、モアレ干渉法などの面内の変位を測定する光学系に比べて一般的に単純であり、測定も比較的容易である。平面応力状態にある試料の厚さや面外変位を測定した場合、面内の垂直応力の和を得ることができる。したがって、この垂直応力和から応力成分を決定することができれば測定が簡単になる。

垂直応力和は応力不変量であり、主応力和と一致する。この値は、赤外線サーモグラフィを用いた熱弾性法でも得ることが可能であり、主応力和から応力成分を分離する研究が従来から行われている⁽¹⁾。一方、著者の一人は主応力和の測定データから応力成分を求める新たな方法を提案した⁽²⁾。主応力和はエアリの応力関数の2階微分の和で表すことができるが、これはポアソン方程式となり、有限要素法で解くことが可能である。しかしながら、この方法では境界条件の設定についての検討が必要である。

そこで本研究では、弾性理論による解を利用して境界条件を決定し、主応力和の測定データから応力成分を求める方法を提案する。この方法の有効性を実験により検証する。この方法により主応力和から応力成分を求めることが可能となれば、測定そのものが簡単になり有用であると考えられる。

2. 基本 原理

主応力和と $\sigma_1 + \sigma_2$ とエアリの応力関数 U には次式の関係がある。

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = \sigma_x + \sigma_y = \sigma_1 + \sigma_2 \quad (1)$$

式(1)はポアソン方程式であり、有限要素法等の数値解析法により解くことが可能である。その際、以下の様に境界条件を設定する必要がある。

$$U = \bar{U} \text{ along } \Gamma_u \\ q = \frac{\partial U}{\partial n} = \frac{\partial U}{\partial x} n_x + \frac{\partial U}{\partial y} n_y = \bar{q} \text{ along } \Gamma_q \quad (2)$$

ここで、 $\bar{U}$ および $\bar{q}$ はそれらの値が境界において与えられることを意味し、 Γ_u および Γ_q はそれぞれの境界を表す。また、 n は境界の外向き法線を表し、 n_x および n_y は外向き単位法線ベクトルの方向余弦である。式(2)の第1式はディリクレ境界条件、第2式はノイマン境界条件と呼ばれる。

^{*1} 正員, 青山学院大学 (〒252-5258 相模原市中央区淵野辺 5-10-1)

^{*2} 青山学院大学

E-mail: yoneyama@mc.aoyama.ac.jp

Fig. 1 Perforated plate specimen subjected to nonuniform remote stresses

Fig. 2 Mach-Zehnder interference fringes (a) before and (b) after load

Fig. 3 (a) Wrapped and (b) unwrapped phase difference

ノイマン境界条件は解析対象領域の境界に作用する表面力を利用すれば求める事が可能である⁽²⁾。しかしながら、その表面力は未知であるため、実際にはその境界条件を決定する事は困難である。そこで弾性解を利用し、ディリクレ境界条件を主応力和の測定値から推定する。

弾性力学のハンドブックや教科書⁽³⁾を参照すると、遠方に一樣な応力の作用する板における円孔周辺の応力関数が与えられている。本研究では、一樣応力場もしくははなだらかに変化する応力場に円孔が存在することで応力集中が生じ応力分布が乱れている状況を想定し、次式のように上記の応力関数に多項式を加えて用いる。

$$U(x,y) = -\frac{1}{4r^4} \left\{ -2r^4 [Bx^2 + y(-2Cx + Ay)] + R^4 [4Cxy + A(x^2 - y^2) + B(-x^2 + y^2)] - 2R^2 r^2 [4Cxy + A(x^2 - y^2) + B(-x^2 + y^2)] + R^2 r^4 (A + B) \log r^2 \right\} + Dx^3 + Ey^3 \quad (3)$$

ここで、 x, y は円孔中心を原点とした座標、 r は原点か

Fig. 4 Finite element model used for solving Poisson equation

らの距離、 $A \sim E$ は係数、 R は円孔の半径である。また、式(3)から主応力和は次式で表現できる。

$$\sigma_1 + \sigma_2 = A' + \frac{2R^2}{r^2} \{ B'(-x^2 + y^2) - 4Cxy \} + 6Dx + 6Ey \quad (4)$$

ここで、 $A' = A + B$ 、 $B' = A - B$ である。したがって、主応力和の測定値から係数 $A \sim E$ を決定すれば、式(3)によりエアリの応力関数を決定する事ができる。このエアリの応力関数をディリクレ境界条件として用い、ポアソン方程式を解くことで応力分離を行う。

なお、エアリの応力関数が得られれば応力成分を決定することが可能である。しかしながら、現実の応力関数は不明であるため、上記手順により得られたエアリの応力関数は境界における近似値として取り扱い、内部の応力関数はポアソン方程式を解く事により算出する。

3. 実験による検証

3.1 実験方法 提案する手法の妥当性を検証するため、実験により得られた主応力和に対して提案する方法を適用し、応力を算出した。ここでは、なだらかに変化する応力場に円孔が存在する場合を想定し、図1に示すような円孔を有する板を測定対象とした。荷重値は $P = 216 \text{ N}$ とした。主応力和の測定にはマッハ・ツェンダー干渉計を用いた。マッハ・ツェンダー干渉計を用いて透明な試験片を観察すると、負荷前後の試験片の厚さおよび屈折率の変化による干渉縞が現れる。平面応力状態を仮定すれば、厚さの変化は主応力和に比例する。また、試験片が複屈折を示さなければ、屈折率の変化も同様に主応力和に比例する⁽⁴⁾。したがって、マッハ・ツェンダー干渉計を用いて主応力和の測定が可能である。現れた干渉縞はCCDカメラ ($640 \times 480 \text{ pixels} \times 8 \text{ bits}$) により撮影した。干渉縞の位相解析にはランダム位相シフト法を用いた⁽⁵⁾。

3.2 実験結果 図2は負荷前後の円孔周辺部における干渉縞模様である。この図に示すように、負荷前にキャリアと呼ばれる干渉縞模様が現れている。したが

Fig. 5 Stresses determined from interferometrically measured isopachics by the proposed method: (a) σ_x ; (b) σ_y ; (c) τ_{xy}

Fig. 6 Stress components around a hole obtained by finite element direct analysis: (a) σ_x ; (b) σ_y ; (c) τ_{xy}

って、主応力は負荷前後の干渉縞の位相差を用いて求めた。得られた位相差分布を図 3(a)に、位相接続後の位相差分布すなわち主応力分布を図 3(b)に示す。これらの位相差は試験片形状を反映して特に上下方向に非対称な分布となっていることがわかる。

応力分離の対象領域は円孔周辺の $10 \text{ mm} \times 10 \text{ mm}$ の領域とした。図 4 は今回の応力分離に用いた解析対象領域の有限要素モデルである。このモデルには 8 節点アイソパラメトリック要素を用いた。なお、提案する方法ではエアリの応力関数を 2 階微分することで応力を決定するため、2 次要素もしくはさらに高次の要素を使用する必要がある。このモデルの境界におけるディリクレ境界条件を主応力とデータから最小二乗法を用いて決定した。主応力の値は、変位測定データの平滑化法⁽⁶⁾と同様に最小二乗法を用いて各要素における形状関数に近似する方法を利用して有限要素モデルに入力した。

図 5 は主応力の測定結果から提案する方法により応力成分を求めた結果である。図 6 に示す有限要素順解析結果とよく一致した応力分布が得られている。

以上の結果から、提案する方法により主応力の測定データの応力分離が可能であることが分かった。すなわち、マッハ・ツェンダー干渉計やトワイマン・グリーン干渉計などの簡単な干渉計を利用した主応力の測定により応力成分を求めることが可能である。提案する方法では、弾性解を利用してディリクレ境界条

件を推定する必要がある。弾性解の存在しない一般的な問題へ本方法を適用するためには、境界条件の設定方法について検討する必要がある。

4. 結 論

本研究では、実験により得られた主応力とデータを応力分離し、各応力成分を求める方法を提案した。この方法では、エアリの応力関数と主応力との関係式を有限要素法により解くことにより、エアリ応力関数の分布を求め、さらに応力成分を求めることができる。その際、弾性解を利用することで解析対象領域境界のエアリの応力関数を推定し、境界条件として用いる。この方法により主応力から応力成分を求めることが可能であり、測定そのものが簡単になり有用であると考えられる。

参 考 文 献

- (1) Kishimoto, K., Inoue, H., Shinbo, H. and Shibuya, T., *JSME Int. J., Ser. A*, **40**, (1997), 108–116.
- (2) Yoneyama, S. and Okuno, K., *Proc. International Symposium on Advanced Science and Technology in Experimental Mechanics*, (2010), No 36.
- (3) 國尾 武, 固体力学の基礎, (1977), 培風館.
- (4) Theocaris, P.S. and Gdoutos, E.E., *Matrix Theory of Photoelasticity*, (1979), Springer.
- (5) Zhang, W. and Han, B., *Opt. Lett.*, **29**, (2004), 1671–1673.
- (6) 小林 俊, 米山 聡, *実験力学*, **10**, (2010), 347–352.