412 デビルスティックの持続回転運動のフィードバック制御

Feedback Control of Enduring Rotary Motion of Devil Stick

川井田 康礼 (富士通) ○ 中浦 茂樹 (東工大)

大島 龍介 (東工大) 正 三平 満司 (東工大)

Yasuyuki Kawaida, Fujitsu LTD.

Shigeki Nakaura, Ryusuke Ohata and Mitsuji Sampei

Tokyo Institute of Technology, 2-12-1 Oh-okayama, Meguro-ku, Tokyo

Devil stick is a kind of juggling as to control a floating stick (the center stick) by hitting or pushing with other sticks (the hand sticks). Various stick motions are performed by jugglers and some of them are studied as control problem.

The purpose of this paper is to rotate the center stick by only pushing with one hand stick. In other word, control objective is to maintain the position and the angular velocity of the center stick.

The control strategy in this paper is as follows. To begin with, some states are controlled by output zeroing control. The output function is derived from observing the motion of good jugglers. But there are two problems in this strategy. First, since the attitude angle of the center stick is in unobservable subspace, the angular velocity can't be controlled. Secondly, the direction of the input force isn't considered. For the first problem, by solving equations of the zero dynamics, it turns out that it is possible to stabilize the angular velocity by changing the contact point of the center stick and the hand stick. For the second one, the analytical result shows that the required force depends on the angular velocity. Some numerical simulations show the usefulness of the proposed strategy.

Key Words: Devil stick, Juggling, Zero dynamics, Enduring rotary motion

1 はじめに

デビルスティックとは、人間が手に持った棒（ハンドスティック）で空中に浮いている棒（センタースティック）を操る曲芸の一種である。この種の芸としては、両手に持ったハンドスティックでセンタースティックを押す、または叩くことによりセンタースティックを落下させないアイドリングと呼ばれる技（図1）があり、Schaal⁽¹⁾らによる研究では実験的に検証されている。本研究ではプロペラと呼ばれる技（図2）で、片手に持ったハンドスティックでセンタースティックを押すことでセンタースティックを回転させ続けるような運動の実現、つまりセンタースティックの位置と角速度を制御することを目指している。押す力だけで制御を行うことは、制御入力に大きな制限があることを意味し、非常に困難な問題である。

本論文の構成は以下の通りである。2節において、デビルスティックをモデル化し、状態方程式を導出する。さらにスティック間の接触に関し、いくつかの仮定を設定する。3節では、デビルスティックを回転させ続けるための制御目標を述べる。4節では、人間がデビルスティックを操作する様子を観察することにより得られた出力関数に対し、出力零化制御の効果をシミュレーションにより確認する。さらに、構成したシステムにおける不可観測な状態に対し、zero dynamicsの解析を行うことで、望ましい挙動を示すための条件を導出する。5節では、得られた解析結果を検証するための実験装置に関し簡単に述べ、最後に6節において本論文をまとめている。

Fig. 1: Idling motion

Fig. 2: propeller motion

2 デビルスティックのモデル

本論文では、図3のようなデビルスティックのモデルを考える。センタースティックは鉛直平面内で動作するものとし、その重心の位置を極座標で (r, θ) 、姿勢角を ϕ で表す。ハンドスティックからセンタースティックに加える力を $\mathbf{F} = [F_t, F_n]^T = [F_r, F_\theta]^T$ とする。

2.1 センタースティックとハンドスティックの接触

センタースティックとハンドスティックが接触しているときに、以下の仮定が成り立っているとする。

Fig. 3: Devil stick model on the vertical plane

Table 1: Parameter of the devil stick

(r, θ)	: Position of the center of gravity of the center stick in the polar coordinate
ϕ	: Attitude angle of center stick
d	: Position of the contact point from the center of gravity of the center stick
$\mathbf{F}$	: Force applied by the center stick
F_t, F_n	: (t, n) direction's component of $\mathbf{F}$
F_r, F_θ	: (r, θ) direction's component of $\mathbf{F}$

仮定 1 接触点での静止摩擦力は十分大きく、ハンドスティックは横滑りしない。

仮定 2 センタースティックの回転に伴い、転がりによって接触点に変化する。

仮定 2 より、センタースティックの重心から見た接触点の位置 d はセンタースティックの姿勢角 ϕ に依存しており、ハンドスティックの半径を ρ とすると以下の関係式が成り立つ。

$$d(\phi) = -\rho\phi + d_0 \quad (1)$$

ここで、 d_0 は初期接触位置とする。

本研究の目的は、センタースティックを回転させ続けることであり、その場合 ϕ は増加し続けることになる。このとき、(1) より $d(\phi)$ は発散してしまう。人間がセンタースティックを操る際、 $d(\phi)$ の発散を防ぐために「センタースティックが 1 回転する度にハンドスティックをセンタースティックから離し、ハンドスティックの位置を初期位置の近くに返す」という動作を行う。この動作により、接触点が発散することなく、センタースティックを回転させ続けることが可能となる。そこで、この動作を簡単化することで、次の仮定をおくことにする。

仮定 3 センタースティックが 1 回転する (ϕ が 2π 増加する) 度に、接触点が瞬間的に元の位置に戻る。

Fig. 4: The relationship between ϕ and $d(\phi)$

Table 2: Physical parameter

m	: Mass of the center stick
J	: Moment of inertia of the center stick
ρ	: Radius of the hand stick
g	: Acceleration of gravity

仮定 3 より、 $\phi = \phi_{\text{jump}}$ の瞬間に $d = d_{\text{max}}$ に戻るとすると、 $d(\phi)$ と ϕ の関係は

$$\begin{cases} d(\phi) = -\rho(\phi - \phi_{\text{jump}}) + d_{\text{max}} \\ \quad (\phi_{\text{jump}} \leq \phi < \phi_{\text{jump}} + 2\pi) \\ d(\phi + 2\pi) = d(\phi) \end{cases} \quad (2)$$

で表すことができ、その様子を図 4 に示す。

2.2 状態方程式

センタースティックの重心位置に関して、表 2 の物理パラメータの元、極座標での運動方程式を導出する。 r 方向、 θ 方向の加速度をそれぞれ a_r, a_θ とすると、以下の式が成り立つ。

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 \quad (3)$$

$$a_\theta = 2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} \quad (4)$$

これら a_r, a_θ は、 $\mathbf{F}$ の分力 F_r, F_θ により

$$a_r = \frac{F_r}{m} - g \sin \theta \quad (5)$$

$$a_\theta = \frac{F_\theta}{m} - g \cos \theta \quad (6)$$

と表すことができる。幾何学的に、 F_r, F_θ と F_t, F_n の間には

$$\begin{bmatrix} F_r \\ F_\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta - \phi) & \sin(\theta - \phi) \\ -\sin(\theta - \phi) & \cos(\theta - \phi) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_t \\ F_n \end{bmatrix} \quad (7)$$

の関係がある。以上より、(5)(6)(7)を用いて(3)(4)を書き直すことで

$$\ddot{r} = r\dot{\theta}^2 - g \sin \theta + \frac{\cos(\theta - \phi)}{m} F_t + \frac{\sin(\theta - \phi)}{m} F_n \quad (8)$$

$$\ddot{\theta} = -\frac{2\dot{r}\dot{\theta}}{r} - \frac{g \cos \theta}{r} - \frac{\sin(\theta - \phi)}{rm} F_t + \frac{\cos(\theta - \phi)}{rm} F_n \quad (9)$$

のような運動方程式が得られる。また、センタースティックの姿勢角 ϕ に関する運動方程式は以下になる。

$$\ddot{\phi} = \frac{d(\phi)F_n}{J} \quad (10)$$

(8)(9)(10) をまとめ、状態と入力を

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} r & \theta & \phi & \dot{r} & \dot{\theta} & \dot{\phi} \end{bmatrix}^T \quad (11)$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{F} = \begin{bmatrix} F_t & F_n \end{bmatrix}^T \quad (12)$$

$$(13)$$

と選ぶことで、以下のような非線型状態方程式を導出することができる。

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{G}(\mathbf{x})\mathbf{u} \quad (14)$$

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \dot{r} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\phi} \\ r\dot{\theta}^2 - g \sin \theta \\ -\frac{2\dot{r}\dot{\theta}}{r} - \frac{g \cos \theta}{r} \end{bmatrix} \quad (15)$$

$$\mathbf{G}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{\cos(\theta - \phi)}{m} & \frac{\sin(\theta - \phi)}{m} \\ -\frac{\sin(\theta - \phi)}{rm} & \frac{\cos(\theta - \phi)}{rm} \\ 0 & \frac{d(\phi)}{J} \end{bmatrix} \quad (16)$$

3 制御目標

本研究の目的は、センタースティックを持続的に回転させることであり、このためにはセンタースティックの位置と角速度を制御する必要がある。一方、人間がセンタースティックを操る様子を見ると

- 重心の位置が、ある点を中心に振動的に動く。その際、位置と姿勢角の振動周期が等しくなる。
- 角速度が一定になる。

ということが観察できる。1つめの項目について考察すると、力を加える方向に制限があり、その方向が姿勢角 ϕ に依存していることがわかる。そのため、姿勢角の変化に伴い、センタースティックの重心位置が振動的に変化してい

Fig. 5: Control objective

ると考えられる。よって、重心を原点に近づけるために、 θ と ϕ の関係を一定に保つ、すなわち $\theta - \phi = \text{constant}$ とすることが望ましいと思われる。

以上より、センタースティックの持続回転を実現するためには、

1. 重心の原点からの距離: r
2. 重心位置の偏角と姿勢角の差: $\theta - \phi$
3. 姿勢角の角速度: $\dot{\phi}$

を制御する必要がある。まず、重心の位置 r に関しては、図5のように目標軌道半径 r_d に追従させることを考える。次に、 $\theta - \phi$ をある定数 α に漸近させる。最後に、角速度 $\dot{\phi}$ に関しては制御目標には加えず、次節において zero dynamics の解析を行うこととする。

4 シミュレーション

4.1 出力零化制御による持続回転運動の実現

3節に基づき、以下のような出力関数を設定する。

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_d - r \\ \alpha - (\theta - \phi) \end{bmatrix} \quad (17)$$

$\dot{\phi}$ は出力関数には含めずに、zero dynamics の解析を行うことで、安定になるための条件を導出することにする。

まず(14)を入出力線型化することで、以下のような線型な状態方程式を得ることができる。

$$\dot{\xi} = \mathbf{A}\xi + \mathbf{B}v \quad (18)$$

$$\dot{\eta} = \zeta_1(\xi, \eta) + \zeta_2(\xi, \eta)v \quad (19)$$

$$\dot{y} = \mathbf{C}\xi \quad (20)$$

$$\xi = [\xi_1 \ \xi_2 \ \xi_3 \ \xi_4]^T \quad (21)$$

$$= [r_d - r \ \alpha - (\theta - \phi) \ -\dot{r} \ -(\dot{\theta} - \dot{\phi})]^T \quad (22)$$

$$\eta = [\eta_1 \ \eta_2]^T = [\phi \ \dot{\phi}]^T \quad (23)$$

$$v = \ddot{y} \quad (24)$$

Table 3: Parameter values

m : 0.2 [kg]	r_d : 0.05 [m]
J : 0.01 [kg m ²]	α : $-\frac{1}{2}\pi$ [rad]
ρ : 0.03 [m]	ϕ_{jump} : $\frac{7}{6}\pi$ [rad]
g : 9.8 [m/s ²]	d_{max} : $\frac{1}{2}\rho\pi$ [m]

$$A = \begin{bmatrix} O^{2 \times 2} & I^{2 \times 2} \\ O^{2 \times 2} & O^{2 \times 2} \end{bmatrix} \quad (25)$$

$$B = \begin{bmatrix} O^{2 \times 2} \\ I^{2 \times 2} \end{bmatrix} \quad (26)$$

$$C = \begin{bmatrix} I^{2 \times 2} & O^{2 \times 2} \end{bmatrix} \quad (27)$$

$$\zeta_1(\xi, \eta) = \begin{bmatrix} \eta_2 \\ \frac{j}{h} \end{bmatrix} \quad (28)$$

$$\zeta_2(\xi, \eta) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{j}{h} & \frac{k}{h} \end{bmatrix} \quad (29)$$

$$h = J - d(\eta_1)m(r_d - \xi_1) \cos(\alpha - \xi_2)$$

$$i = d(\eta_1)m\{g \cos \eta_1 - (-\xi_4 + \eta_2)(2\xi_3 \cos(\alpha - \xi_2) + (-\xi_4 + \eta_2)(r_d - \xi_1) \sin(\alpha - \xi_2))\}$$

$$j = -d(\eta_1)m \sin(\alpha - \xi_2)$$

$$k = -d(\eta_1)m(r_d - \xi_1) \cos(\alpha - \xi_2)$$

上記のシステムに対し、表3のパラメータを用いて状態フィードバックによる出力零化のシミュレーションを行った結果を図6に示す。出力である ξ_1, ξ_2 は0に収束しているが、角速度 $\dot{\phi} = \eta_2$ のふるまいは、 ϕ_{jump}, d_{max} に強く依存していることがわかる。

4.2 角速度の安定化

本節では、zero dynamicsの解析を行うことで、角速度 $\dot{\phi}$ が安定となる条件を導出することを試みる。(19), (23), (28), (29)より、zero dynamicsは以下ようになる。

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \phi \\ \dot{\phi} \end{bmatrix} = f_\phi(\phi, \dot{\phi}) = \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \frac{d(\phi)m(g \cos \phi - r_d \dot{\phi}^2 \sin \alpha)}{J - d(\phi)m r_d \cos \alpha} \end{bmatrix} \quad (30)$$

(30)を簡略化するために、 α を固定することを考える。図7は、出力が零化された状態を示している。この状態で回転を続けるとき、重心の原点からの距離 r を保つために遠心力と釣り合うだけの力を加える必要がある。そのために、 $\alpha = -\pi/2$ とすることで常に回転の中心方向に力を加えることができ、制御目標を達成するために適していると思われる。そこで、 $\alpha = -\pi/2$ と固定すると、以

Fig. 6: The results of simulation

Fig. 7: Physical meaning of α

下の簡略化された zero dynamics を得ることができる。

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \phi \\ \dot{\phi} \end{bmatrix} = f_{\phi}(\phi, \dot{\phi}) = \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \frac{d(\phi)m(g \cos \phi + r_d \dot{\phi}^2)}{J} \end{bmatrix} \quad (31)$$

zero dynamics を解析するために、以下の変数変換を行う。

$$\phi' = \phi - 2n\pi, \quad (\phi_{\text{jump}} \leq \phi' < \phi_{\text{jump}} + 2\pi) \quad (32)$$

$\dot{\phi}' = \dot{\phi}$, $\ddot{\phi}' = \ddot{\phi}$ の関係を用いることで、(31)(2) は

$$\ddot{\phi}' = \frac{d(\phi')m(g \cos \phi' + r_d \dot{\phi}'^2)}{J} \quad (33)$$

$$d(\phi') = \rho(\phi' - \phi_{\text{jump}}) + d_{\text{max}} \quad (34)$$

のように表すことができ、(34) を (33) に代入することで次の ϕ' に関する微分方程式を得ることができる。

$$\begin{aligned} \ddot{\phi}' &= \frac{(-\rho(\phi' - \phi_{\text{jump}}) + d_{\text{max}})m(g \cos \phi' + r_d \dot{\phi}'^2)}{J} \\ &= -a_1(\phi' - a_2)(g \cos \phi' + r_d \dot{\phi}'^2) \end{aligned} \quad (35)$$

ただし、 a_1, a_2 は以下で定義するものとする。

$$a_1 = \frac{m\rho}{J}, \quad a_2 = \phi_{\text{jump}} + \frac{d_{\text{max}}}{\rho} \quad (36)$$

ϕ' を解くために、 $\dot{\phi}'^2 = P$ とおき、両辺を微分する。(2)

$$\begin{aligned} \frac{d\dot{\phi}'^2}{dt} &= \frac{dP}{dt} \\ \Leftrightarrow 2\dot{\phi}'\ddot{\phi}' &= \frac{d\phi'}{dt} \frac{dP}{d\phi'} \\ &= \dot{\phi}' \frac{dP}{d\phi'} \\ \Leftrightarrow \ddot{\phi}' &= \frac{1}{2} \frac{dP}{d\phi'} \quad (\dot{\phi}' \neq 0) \end{aligned} \quad (37)$$

(37) と $\dot{\phi}'^2 = P$ を (35) に代入して整理することで

$$\frac{1}{2} \frac{dP}{d\phi'} = -a_1(\phi' - a_2)(g \cos \phi' + r_d P) \quad (38)$$

を得ることができ、これは P を ϕ' の関数として以下のように解くことができる⁽²⁾。

$$\begin{aligned} P(\phi') &= e^{-a_1 r_d \phi'(\phi' - 2a_2)} \int_{C_1}^{\phi'} \frac{-2ga_1(\tau - a_2) \cos \tau}{e^{-a_1 r_d \tau(\tau - 2a_2)}} d\tau \\ &\quad (C_1 : \text{constant}) \end{aligned} \quad (39)$$

ϕ' は $\phi_{\text{jump}} \leq \phi' < \phi_{\text{jump}} + 2\pi$ を満たすことを考慮して、

$$p_k^2 = P(\phi_{\text{jump}}) \quad (40)$$

$$\begin{aligned} p_{k+1}^2 &= \lim_{\phi' \rightarrow \phi_{\text{jump}} + 2\pi} P(\phi') \\ &= P(\phi_{\text{jump}} + 2\pi) \end{aligned} \quad (41)$$

のような離散変数を定義すると、 p_k, p_{k+1} の関係は以下のように表されることがわかる。

$$p_{k+1}^2 = \Lambda_1 p_k^2 + \Lambda_2 \quad (42)$$

$$\Lambda_1 = e^{-4\pi m r_d(\rho\pi - d_{\text{max}})/J} \quad (43)$$

$$\begin{aligned} \Lambda_2 &= e^{-m r_d(\phi_{\text{jump}} + 2\pi)(\rho(-\phi_{\text{jump}} + 2\pi) - 2d_{\text{max}})/J} \times \\ &\quad \int_{\phi_{\text{jump}}}^{\phi_{\text{jump}} + 2\pi} \left\{ \frac{1}{e^{-m r_d \tau(\rho(\tau - 2\phi_{\text{jump}}) - 2d_{\text{max}})/J}} \times \right. \\ &\quad \left. (-2gm(\rho(\tau - \phi_{\text{jump}}) - d_{\text{max}}) \cos \tau / J) \right\} d\tau \end{aligned} \quad (44)$$

ここで p_{∞} について考察するために (42) を解くと、以下を得る。

$$p_{\infty}^2 = \begin{cases} \Lambda_1^k \left(p_0^2 - \frac{\Lambda_2}{1 - \Lambda_1} \right) + \frac{\Lambda_2}{1 - \Lambda_1} & (\text{if } \Lambda_1 \neq 1) \\ p_0^2 + k\Lambda_2 & (\text{if } \Lambda_1 = 1) \end{cases} \quad (45)$$

(43) から $\Lambda_1 > 0$ であるから、 Λ_1 に関し以下の3つの場合が考えられる。

$0 < \Lambda_1 < 1$ の場合

このとき $p_{\infty} = \sqrt{\frac{\Lambda_2}{1 - \Lambda_1}}$ となる。 $\Lambda_2 \geq 0$ のとき p_k は実数に収束するが、 $\Lambda_2 < 0$ のとき p_k は虚数に収束し、これは途中でセンタースティックが逆回転することを意味する。

$\Lambda_1 > 1$ の場合

$p_0 = \sqrt{\frac{\Lambda_2}{1 - \Lambda_1}}$ のときに全ての k に対して $p_k = p_0$ となるが、それ以外のときは発散する。

$\Lambda_1 = 1$ の場合

$\Lambda_2 = 0$ のときに全ての k に対して $p_k = p_0$ となる。 $\Lambda_2 < 0$ のときにはセンタースティックが逆回転し、 $\Lambda_2 > 0$ のときには p_k は発散する。

以上の考察より、センタースティックの角速度を安定にするためには、 $0 < \Lambda_1 < 1, \Lambda_2 > 0$ を満たす必要がある。 $0 < \Lambda_1 < 1$ となる条件は (43) より

$$-4\pi m r_d(\rho\pi - d_{\text{max}})/J < 0 \quad (46)$$

であるが、 m, J, ρ, r_d が正値であることを考慮すると

$$d_{\text{max}} < \rho\pi \quad (47)$$

となる。センタースティックとハンドスティックの接触点 $d(\phi)$ は $d_{\text{max}} - 2\rho\pi < d(\phi) \leq d_{\text{max}}$ の範囲を移動するため、 $d_{\text{max}} < \rho\pi$ の場合には $d(\phi)$ は負の方に寄っていることになる。一方 Λ_2 には積分項が含まれるため、解析的に $\Lambda_2 > 0$ となる条件を求めることは困難である。そこで表4に示すパラメータを用いて数値的に Λ_2 を求めた結果を図8に示す。これより、それぞれのパラメータの組に対して、 $\Lambda_2 > 0$ となるような ϕ_{jump} と d_{max} が存在することが確認できる。

Table 4: Parameters used in calculation of Λ_2

parameter	Fig.9(a)	Fig.9(b)	Fig.9(c)
m/J [m^{-2}]	6.0	20.0	60.0
ρ [m]	0.009	0.03	0.09
r_d [m]	0.015	0.05	0.15

(a)

(b)

(c)

Fig. 8: variation of Λ_2

5 実験装置の概要

2節において、センタースティックが1回転する度に接触点が瞬間的に初期位置に戻ることを仮定した。しかし、実験的にこの仮定を実現することは困難である。そこで、前説までで議論してきたデビルスティックの持続回転運動を実験的に検証するために、先の仮定の近似的な実現として以下の2つのphaseを考える。

phase 1 ハンドスティックを介してセンタースティックに力が加えられていて、ハンドスティックのまわりをセンタースティックが回転している状態。

phase 2 センタースティックは自由に移動できる、つまり、ハンドスティックから力は加わっておらず、ハンドスティックはセンタースティックに沿って滑ることができる状態。

Fig. 9: Overview of experimental setup

phase 1においては、センタースティックは持続回転するように制御することができる。しかし、phase 2においてはセンタースティックは惰性で回転するのみである。

以上を踏まえ、本研究で製作した実験装置を図9に示す。2つのphaseの切り替えは、空気圧によりハンドスティックの摩擦状態を変化させることで実現している。今後、センタースティックの持続回転を実験的に実現させることを試みていく予定である。

6 まとめ

本論文では、デビルスティックの持続回転運動の実現に対し以下のような結果を得た。

- 接触点に関する仮定のもとで、デビルスティックの状態方程式の導出
- 人間がデビルスティックを操作する様子の観察に基づいた出力関数の設定
- 出力零化による持続回転運動を数値シミュレーションにより確認
- zero dynamicsの解析によりセンタースティックの角速度の振る舞いを考察し、安定な角速度を得るためのパラメータを導出
- 実験的検証に向けての装置の製作

文献

- (1) Stefan Schaal and Christopher G. Atkeson, *Open Loop Stable Control Strategies for Robot Juggling*, Proc. of IEEE International Conference on Robotics and Automation (1993), 913–918
- (2) Kreyszig, *Advanced Engineering Mathematics 8th edition*, John Wiley & Sons, Inc. (1999)