118 切替え制御によるテザー衛星の運動範囲保証

Switching Control to Obtain a Safe Kinetic Region of a Tethered Satellite

○岡崎 将光 (阪大) 正 大塚 敏之 (阪大)

Masamitsu OKAZAKI and Toshiyuki OHTSUKA
Osaka University, 2-1 Yamadaoka, Suita-shi, Osaka

A tethered satellite is connected with a string called tether to a mother ship. Since the tether cannot be pushed, the control tension is constrained to be nonnegative. Additionally, since the tether has flexibility, its analysis is difficult. Therefore it is difficult to guarantee that the tethered satellite does not collide with the mother ship, the tether does not twine, and so on. Nevertheless, it has not been discussed enough to guarantee safety. To operate the satellite safely avoiding aforementioned situations, we propose to give switching conditions for the control input. In this paper, we report about the switching control law and simulation results.

Key Words : Tethered Satellite, Switching Control, Safe Kinetic Region, Nonlinear Receding Horizon Control

1. はじめに

テザーとは宇宙空間において複数の人工衛星などを結ぶひものことである。テザーでつながれた衛星をテザー衛星といい、テザー衛星からなるシステムをテザー衛星システムという。このテザー衛星システムは宇宙ミッションにおいて重要な役割を持っている。応用例として異なる高度での空気密度や磁場の測定、物資の輸送などが考えられ、過去にもテザー衛星を用いたミッションが行われている⁽¹⁾。しかしながら、テザーの解析の難しさ、スペースデブリによるテザー切断の危険性などの課題が数多くある。

実際、1996年にイタリア宇宙事業団とNASAが共同で開発した、テザー衛星のミッションが行われている⁽¹⁾。目的はテザー衛星で地球軌道のプラズマ環境を研究し、発電に使えることを実証するというものだった。しかし、伸展中にテザーが切断してミッションは失敗に終わった。原因はテザーで発生した放電と燃焼によってテザーの大部分が焼失したためであった。また、テザーが切れるまでは不具合の前兆は見られなかったとも報告されている。

このことから、テザーの切断、あるいは絡まりといったことはいつ生じるか分からないと言える。もし、テザーの切断が起これば、テザーが母船に絡まったり、あるいは衛星が母船に衝突するなどの危険がある。それに関わらず、安全性を保証することに関しては未だ十分な検討がなされていない。そこで本研究では、仮にテザー衛星の伸展・回収中にテザーの切断が起こったとしても衛星と母船との衝突などは生じないという保証を得ることを目的とする。本稿では、テザーが切れたとしても衛星が母船の高さに達しないことを保証する。そして、保証を得るために制御入力に切替条件を与えることを提案する。その際、保証を得るための条件は柔軟性を無視したモデルにより導出するが、シミュレーションでの検証は柔軟性を考慮したモデル⁽²⁾を用いていることに注目されたい。また、本稿では紙面の都合上、シミュレーション結果は回収制御についてのみに示すことにする。

2. テザー衛星システム

Fig.1のシステムを考える。母船は半径 R_G 、角速度 Ω の円軌道を周回しているものとする。用いる座標系としては、母船を原点にとり、母船の速度方向を x 、母船から地球の重力中心方向を z 、この2つの方向に垂直な方向を y とした xyz 座標系とする。慣性系に対する角速度ベクトルを $\omega = [0 \ -\Omega \ 0]^T$ 、衛星の質量を m 、地球の質量を M 、万有引力定数を G とする。母船からとった衛星のベクトルを $\mathbf{r}_{sat}(t)$ 、テザーの張力(制御入力)を $u(t)$ とすると、衛星の運動方程式は次のようになる。ただし、 I は単位行列、 $\times$ (太字) は外積を表すものとする。

Fig. 1: tethered satellite system

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}_{sat}(t)}{dt^2} = -G \frac{mM}{\|\mathbf{R}_G\|^3} \left(I - \frac{3\mathbf{R}_G \mathbf{R}_G^T}{\|\mathbf{R}_G\|^2} \right) \mathbf{r}_{sat}(t) - m\omega \times (\omega \times \mathbf{r}_{sat}(t)) - 2m\omega \times \frac{d\mathbf{r}_{sat}(t)}{dt} - u(t) \frac{\mathbf{r}_{sat}(t)}{\|\mathbf{r}_{sat}(t)\|}$$

次にこのモデルの状態方程式を導く。軌道面外 (y) 方向の運動にも張力の影響は現れるが、軌道面内 (xz 面内) の運動とは独立しており、テザー衛星の高度には影響を与えないためここでは考えない。以降は軌道面内での運動に注目する。そこで、状態量を $\mathbf{X} = [x \ \dot{x} \ z \ \dot{z}]^T = [X_1 \ X_2 \ X_3 \ X_4]^T$ とすると状態方程式は次式のように導かれる。ただし、 $r = \sqrt{X_1^2 + X_3^2}$ である。

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{A}(\mathbf{X}) + \mathbf{B}(\mathbf{X})u$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{X}) = \begin{bmatrix} X_3 \\ X_4 \\ 2\Omega X_4 \\ 3\Omega^2 X_2 - 2\Omega X_3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}(\mathbf{X}) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -X_1/mr \\ -X_2/mr \end{bmatrix}$$

3. 無次元入力一定のときの解析解

制御入力はテザーの張力であるが、本稿では無次元化した入力を考える。そこで、無次元化した入力を $\hat{u}$ とする。このとき有次元入力 u との関係は以下になる。また、テザーは押すことが物理的に不可能なため入力は非負という拘束がある。

$$u = m\|\mathbf{r}_{sat}\|\Omega^2 \hat{u}, \quad u, \hat{u} \geq 0$$

このとき、状態方程式は次のように表せる。

$$\dot{\mathbf{X}} = \begin{bmatrix} X_3 \\ X_4 \\ 2\Omega X_4 - X_1 \Omega^2 \hat{u} \\ 3\Omega^2 X_2 - 2\Omega X_3 - X_2 \Omega^2 \hat{u} \end{bmatrix} \quad (1)$$

これは複雑な状態方程式ではないが、非線形なシステムなため扱いが難しい。また、制御入力に拘束があるため、安全性を保証することが難しく、どう保証するのかも問題となる。そこで、 $\hat{u}$ を一定値にした場合、(1) 式は線形になり解析解が得られるのでそれを利用する。具体的な保証方法については 4 節で述べる。 $\hat{u} = c$ (const.) としたとき、状態方程式は次のようになる。

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{A}\mathbf{X}$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\Omega^2 c & 0 & 0 & 2\Omega \\ 0 & \Omega^2(3-c) & -2\Omega & 0 \end{pmatrix}$$

無次元入力を $\hat{u} = c$ と切り替えた瞬間の衛星の状態量を $\mathbf{X}_0 = [x_0 \ z_0 \ \dot{x}_0 \ \dot{z}_0]^T$ とすると、解析解は $\mathbf{X}(t) = e^{At} \mathbf{X}_0$ と求められる。ここで、 $x(t)$ については母船の高度には関係ないため、以降は $z(t)$ のみを考えていく。

まず、目標状態を平衡に保つための入力 $\hat{u}_f$ を求める。目標状態を $X_f = [0 \ L_f \ 0 \ 0]^T$ とし、このとき $\dot{X} = 0$ を状態方程式 (1) に代入すると $\hat{u}_f = 3$ となる。解析解 $z(t)$ は切り替える c の値が $\hat{u}_f$ より大きいかわ小さいかによって形が変わる。

$c \geq \hat{u}_f$ のとき, $z(t)$ の解析解は次のようになる.

$$z(t) = q_1 \sin(\xi_1 t + \theta_1) + q_2 \sin(\xi_2 t + \theta_2)$$

ここで, $q_1, q_2, \xi_1, \xi_2, \theta_1, \theta_2$ は c, X_0 により決まる定数である。この式から, 原点を中心に振動することが分かる。つまり, 確実に母船の高さに達してしまう。そこで, $c < \hat{u}_f$ の場合に限定して考える。このときの解析解を下に示す。

$$z(t) = F \sin(\zeta_1 t + \phi) + \frac{h+k}{n} e^{\zeta_2 t} + \frac{h-k}{n} e^{-\zeta_2 t} \quad (2)$$

ただし

$$\begin{aligned} p &= \Omega\sqrt{16c+1}, \\ \zeta_1 &= \Omega\sqrt{\frac{\sqrt{16c+1}+1}{2}} + c, \quad \zeta_2 = \Omega\sqrt{\frac{\sqrt{16c+1}-1}{2}} - c \\ h &= \frac{p+7\Omega}{4}z_0 - \dot{x}_0, \quad k = \frac{\Omega^2c}{\zeta_2}x_0 + \frac{p-\Omega}{4\zeta_2}\dot{z}_0 \\ F &= \sqrt{\left(\frac{(p-7\Omega)z_0+4\dot{x}_0}{2p}\right)^2 + \left(\frac{(p+\Omega)\dot{z}_0-4\Omega^2cx_0}{2p\zeta_1}\right)^2} \\ \phi &= \tan^{-1}\frac{(p-7\Omega)\zeta_1z_0+4\zeta_1\dot{x}_0}{(p+\Omega)\dot{z}_0-4\Omega^2cx_0} \end{aligned}$$

4. 安全性の保証方法

前節で求めた解析解をどのように利用して安全性を保証するのかを説明する。なお、Fig.2はイメージ図である。目的は安全性を保証することであり、本稿では $z(t) \geq a, \forall t \geq 0, a \geq 0$ を保証することを考える。 $a = 0$ のときに母船の高さを意味する。

保証方法についてだが、まず、テザーが切れたとしても衛星が $a[m]$ に達しないための状態量の範囲 (範囲 A) を求める。この範囲内に衛星を常に留めておくことが目的となる。しかし、常に留めておくという事はできない (5 節参照)。そこで、 $\hat{u} = c$ の解析解を利用する。まず、 $\hat{u} = c$ とした時の運動において、Fig.2 中の範囲 A から出ないための状態量の範囲 (範囲 B) を求める。衛星が範囲 B に含まれているときの入力はいりる制御則に従い決定する。範囲の境界に達したとき、 $\hat{u} = c$ と入力を固定する。再び範囲 B に戻ってきたら制御則に従って入力を決定する。このように入力の切替えを与えることにする。これにより衛星を範囲 A に常に留めておくことができる。

Fig. 2: the method for guarantee of safety

5. テザー一切断時の衛星の運動

テザーが切断した瞬間から衛星は自由運動を始めることになる。このときの解析解はヒルの方程式⁽³⁾により次のように書ける。

$$\begin{cases} x(t) = -\frac{2\dot{z}_0}{\Omega} \cos \Omega t + \dot{x}_0 t + x_0 + \frac{2\dot{z}_0}{\Omega} \\ z(t) = \frac{\dot{z}_0}{\Omega} \sin \Omega t + z_0 \end{cases}$$

これより, $z(t) \geq a$ の十分条件は次のように求まる.

$$|\dot{z}_0| \leq \Omega(z_0 - a)$$

したがって、常にテザーの切断を考慮することは、以下の式を満たすということである。

$$|\dot{z}(t)| \leq \Omega(z(t) - a), \quad \forall t > 0 \quad (3)$$

(3) 式が Fig.2 中の範囲 A に相当する。常に満たさなければならないので、拘束条件として与えることが考えられる。そこで、常に満たし続けることができるかを次のように調べた。(3)式の右辺を移項して、 $C(X) \leq 0$ とおく。 $C(X) = 0$ のとき $\dot{C}(X) \leq 0$ を満たす $\hat{u} \geq 0$ が存在するかを計算する。その結果、入力 $\hat{u} \geq 0$ により $C(X) \leq 0$ を満たし続けるには、状態量は次の条件のいずれかを満足しなければならないことが分かった。

条件 (a) $C(\mathbf{X}) < 0$

条件 (b) $C(\mathbf{X}) = 0$ かつ $\dot{z} \geq 0$

条件 (c) $C(\mathbf{X}) = 0$ かつ $\dot{z} < 0$ かつ $\dot{x} \leq \Omega z + \frac{\Omega a}{2}$

つまり、 $C(\mathbf{X}) = 0$ の境界上で $\dot{z} < 0$ かつ $\dot{x} > \Omega z + \Omega a/2$ のとき、 $C(\mathbf{X}) \leq 0$ を満たし続けることができない。したがって、拘束条件として与えても破られる場合があるということが分かる。このことから、本稿で提案する切替え制御が有用であると考える。

6. テザ一切断を考慮した保証条件

6-1 保証条件の導出 $\hat{u} = c$ の下で (3) 式を満たし続けるための状態量 X_0 の条件 (Fig.2 の範囲 B に相当) を導出する. (2) 式を時間微分し, (3) 式に代入すると次のようになる.

- $\dot{z}(t) > 0$ のとき

$$\zeta_1 F \cos(\zeta_1 t + \phi) + \Omega F \sin(\zeta_1 t + \phi) + \frac{h+k}{p}(\Omega + \zeta_2)e^{\zeta_2 t} + \frac{h-k}{p}(\Omega - \zeta_2)e^{-\zeta_2 t} - \Omega a \geq 0 \quad (4)$$

- $\dot{z}(t) < 0$ のとき

$$- \zeta_1 F \cos(\zeta_1 t + \phi) + \Omega F \sin(\zeta_1 t + \phi) + \frac{h+k}{p}(\Omega - \zeta_2)e^{\zeta_2 t} + \frac{h-k}{p}(\Omega + \zeta_2)e^{-\zeta_2 t} - \Omega a \geq 0 \quad (5)$$

(4), (5) 式が任意の時刻で成り立つための $\mathbf{X}_0$ の十分条件は次のように導出できる。

$$h + k \geq 0 \quad (6)$$

かつ

1. $\dot{z} \geq 0$ かつ $k\Omega + h\zeta_2 < 0$ のとき, および $\dot{z} < 0$ かつ $k\Omega - h\zeta_2 < 0$ のとき

$$\frac{2\sqrt{(h^2 - k^2)(\Omega^2 - \zeta_2^2)}}{p} - F\sqrt{\Omega^2 + \zeta_1^2} \geq \Omega a \quad (7)$$

2. $\dot{z} \geq 0$ かつ $k\Omega + h\zeta_2 \geq 0$ のとき, および $\dot{z} < 0$ かつ $k\Omega - h\zeta_2 \geq 0$ のとき

$$\frac{2(h\Omega + k\zeta_2)}{p} - F\sqrt{\Omega^2 + \zeta_1^2} \geq \Omega a \quad (8)$$

(6), (7), (8) 式が Fig.2 中の範囲 B に相当する, 一定入力時 ($\hat{u} = c$) におけるテザー切断を考慮した保証条件となる。

6-2 保証条件の包含関係 (7), (8) 式に包含関係が成り立っているのをそれを説明する。(7) 式の左辺第 1 項における根号部分を見ると,

$$\begin{aligned} \sqrt{(h^2 - k^2)(\Omega^2 - \zeta_2^2)} &= \sqrt{(h\Omega)^2 + (k\zeta_2)^2 - (h^2\zeta_2^2 + k^2\Omega^2)} \\ &\leq \sqrt{(h\Omega)^2 + (k\zeta_2)^2} \\ &\leq \sqrt{(h\Omega)^2} + \sqrt{(k\zeta_2)^2} \\ &= h\Omega + k\zeta_2 \end{aligned}$$

と表すことができる。よって, 以下の関係が成り立つ。

$$\frac{2\sqrt{(h^2 - k^2)(\Omega^2 - \zeta_2^2)}}{p} \leq \frac{2(h\Omega + k\zeta_2)}{p}$$

つまり, (7) 式が成り立てば, (8) 式も成り立つことが分かる。したがって, (6), (7) の 2 式のみを保証条件として用いることもできる。しかし, これは (8) 式を用いない分, より厳しい保守的な条件となる。

衛星の状態量がこの保証条件を満たしている間は用いる制御則によって入力を決定し, 境界に達した場合は無次元入力を一定値にするという入力の切替則を与える。これにより, テザーがいつ切断しても $z(t) \geq a, \forall t \geq 0$ を保証することができる。

7. シミュレーション

7-1 制御手法 非線形システムを扱う制御則として, 本稿では非線形 Receding Horizon 制御⁽⁴⁾を用いる。制御入力には非負という不等式拘束があるので, ダミー入力 d を用いて等式拘束に変換する。

$$\hat{u} \geq 0 \iff \hat{u} - d^2 = 0$$

評価関数については次のように与える。ここで, $\mathbf{X}_f$ は目標状態, $\mathbf{v} = [u, d]^T$, $\mathbf{v}_f = [u_f, \sqrt{u_f}]^T$ である。また, $\wedge$ は変数を無次元化したものとする。

$$\begin{aligned} J = & \frac{1}{2} [\hat{\mathbf{X}}(t+T) - \hat{\mathbf{X}}_f]^T S_f [\hat{\mathbf{X}}(t+T) - \hat{\mathbf{X}}_f] \\ & + \frac{1}{2} \int_t^{t+T} [(\hat{\mathbf{X}} - \hat{\mathbf{X}}_f)^T Q (\hat{\mathbf{X}} - \hat{\mathbf{X}}_f) \\ & + (\hat{\mathbf{v}} - \hat{\mathbf{v}}_f)^T R (\hat{\mathbf{v}} - \hat{\mathbf{v}}_f)] dt' \end{aligned}$$

なお, S_f , Q , R は適当な重みである。

7-2 回収制御 6 節の保証条件は柔軟性を無視したモデルから導出した。それは, 柔軟性を考慮したモデルは運動方程式が複雑なため, 保証条件を導出することが困難なためである。そこで, 柔軟性を無視したモデルから得られた保証条件を用い, 柔軟性を考慮したモデル⁽²⁾でシミュレーションを行い, 有効性を検証する。

シミュレーション結果を Fig.3, Fig.4 に示す。いま $a = 200[\text{m}]$ には達して欲しくない状況だとする。初期状態は, $\mathbf{X}_0 = [0 \ 900 \ 0 \ 0]^T$, 目標状態は $\mathbf{X}_f = [0 \ 500 \ 0 \ 0]^T$ である。重みは $S_f = 10I$, $Q = [0.1 \ 10 \ 0.1 \ 0.1]^T$, $R = 0.1I$ (I は単位行列), 一定にする入力値は $c = 2.6$ ($\hat{u}_f = 3$), シミュレーション時間はいずれも 15000 [sec] である。各図において “initial” は初期位置, “target” は目標位置を表している。また, 切替えを行った図の破線部分は $\hat{u} = c$ と一定にしているところである。Fig.3 (a) を見るとテザーが切れないとすれば安全と言えるが, もし図中に示す P 点でテザーが切断されたとなると, Fig.3 (b) に示す通り $a = 200[\text{m}]$ を大きく超えてしまう。場合によっては衛星が母船と衝突する危険すらある。そこで, 6 節で導出した保証条件 (6), (7), (8) 式を付加する。そのときの解軌道を Fig.3 (c) に示す。切替えを行わなかったときと比べると, 違いは表れているがこの図だけではテザー切断をどう考慮しているのか分からないので, Fig.4 で説明する。Fig.4 における 2 直線の内側が (3) 式を意味する。つまり, 衛星の状態量 ($z, \dot{z}$) を 2 直線の内側に留めておくことがテザー切断を考慮することになる。Fig.4 (a) は切替えを行わなかったとき, Fig.4 (b) は切替えを行ったときの結果である。Fig.4 (a) の P 点のように 2 直線の外側に出ている部分でテザーが切れると, 設定した $a[\text{m}]$ の高さを確実に超えてしまう。Fig.4 (b) は 2 直線の内側に状態量を留めることができているため, テザーがいつ切れても, 設定した $a[\text{m}]$ の高さを超えることはない。また, Fig.3 (d), Fig.4 (c) は切替え条件として (6), (7) の 2 式のみを用いたときの結果である。この場合も良好な結果が得られている。

8. おわりに

テザー衛星が母船に衝突するなどの危険を回避するため, ヒルの方程式および無次元入力一定時の解析解を用いて制御入力に与える切替条件を導出した。切替条件は柔軟性を無視したモデルで導き, シミュレーションは柔軟性を考慮したモデルで行ったが, 良好な結果が得られた。また切替条件により, 仮にテザーが切れて衛星が制御不能状態に陥っても, 衛星が母船に衝突したりすることはない。つまり, 衛星の運動範囲が保証された。

参考文献

- (1) NASDA NEWS, 海外宇宙情報, No. 174, No. 177, URL: <http://www.nasda.go.jp/lib/nasda-news/1996/08/back-j.html> (1996)
- (2) 渡辺 大輔, 大塚 敏之: 柔軟性を考慮したテザー衛星の軌道面外運動に対する非線形 RH 制御, 第 46 回システム制御情報学会研究発表講演会講演論文集, pp. 49-50 (2002)
- (3) 木田 隆, 小松 敬治, 川口 淳一郎: 人工衛星と宇宙探査機, コロナ社 (2001)
- (4) 大塚 敏之: 非線形 Receding Horizon 制御の計算方法について, 計測と制御, Vol. 41, No. 5, pp. 366-371 (2002)

(a) without switch

(b) when the tether cuts

(c) with switch (3 switching conditions)

(d) with switch (2 switching conditions)

Fig. 3: x - z plane trajectories

(a) without switch

(b) with switch (3 switching conditions)

(c) with switch (2 switching conditions)

Fig. 4: z - $\dot{z}$ plane trajectories