506 円筒介在物による弾性散乱波の位相・振幅に関する理論解析

Theoretical analysis on amplitude change and phase shift of elastic scattering waves by cylindrical inclusions

○学 古嶋亮一 (東京工業大学) 正 松尾陽太郎 (東京工業大学)
塩田忠 (東京工業大学) 正 安田公一 (東京工業大学)

Ryoichi FURUHIMA, Tokyo institute of Technology, Ookayama2-12-1, Meguro-ku, Tokyo
Yohtaro MATSUO, Tokyo institute of Technology, Tadashi SHIOTA, Tokyo institute of Technology
Kouichi YASUDA, Tokyo institute of Technology

Changes in amplitude and phase of incident waves due to scattering by cylindrical inclusions contained in an isotropic matrix are considered. These changes relate to changes in apparent sonic velocity and attenuation coefficient obtained by the ultrasonic method. The integral equation suggested by Lavrov⁽¹⁾ for scattering waves due to single inclusion gives the changes in amplitude and phase. In order to consider the cases that the number of inclusions contained in the matrix is more than two, the frequency response function corresponding to the frequency response when the incident waves passed through the single inclusion in the matrix was introduced.

1. はじめに

材料中の介在物により入射した弾性波が散乱することは知られているが、それにより弾性波がどのように変化するかを定量的に調べた例はほとんどない。本研究では Lavrov らが報告した単一の円筒状介在物上での弾性波散乱に関する解析方法⁽¹⁾を用いて複数の介在物を含む材料中における縦波弾性波の振幅および位相の変化を求め弾性波の変化を調べた。

2. 解析方法

前提条件として、等方弾性マトリックス中に円筒介在物が存在する系を考える。円筒介在物は長軸方向の長さが $2L$ 、直径 $2h$ の等方弾性体とし、 L は h よりも十分大きいとする。今、Fig.1 のように、密度 ρ で与えられるマトリックス中に密度 ρ_1 の円筒介在物が $x_1=0$ から $x_1=2L$ に存在すると仮定し、そこに平面弾性縦波を円筒の長軸方向 (x_1 軸) に垂直 (x_3 軸) に入射させた系を考える。このとき入射波の変位ベクトル u_{incident} は以下の形で与えられる。

$$u_{\text{incident}} = u_0 \exp \left\{ -i\omega \left(t - \frac{x_3}{c_L} \right) \cdot i_3 \right\} \quad (1)$$

u_0 は入射波の平均変位 (振幅)、 ω は入射波の角周波数、 c_L は入射波の縦波音速、 i_3 は x_3 軸方向の単位ベクトルである。

Fig.1 A schematic illustration of scattering system

ここで円筒介在物の長さ $2L$ を上記の式から消去するために、規格化を行い円筒介在物が $x_1=-1$ から $x_1=1$ に存在するように変換すると、単一の円筒気孔による入射波の散乱後の x_1 軸上の $x_1=s$ における x_1, x_2, x_3 軸方向の変位ベクトルの成分を入射波の振幅 u_0 で割った規格化変位 $U_{s1}(x_1), U_{s2}(x_1), U_{s3}(x_1)$ ($x_1=s$) は Lavrov らにより以下のように求められている⁽¹⁾。

$$U_{s1}(s) = U_{s2}(s) = 0 \quad (2)$$

$$U_{s3}(s) = A \left[BU_{s3}(s) \cdot f(s) + \int_{-1}^1 K(|s-s'|) U_{s3}(s') ds' \right] + B \left\{ \int_{-1}^1 \frac{U_{s3}(s') - U_{s3}(s)}{|s-s'|} ds' \right\} \quad (3)$$

$$K(s) = \frac{1}{s} \left[\exp(ips) - \frac{3-4\nu}{4(1-\nu)} \frac{1}{p^2 s^2} \right] \left\{ \exp \left(\frac{ic_s p}{c_L} s \right) \cdot \left(\frac{ic_s p}{c_L} s - 1 \right) - \exp(-ips) \cdot (-ips - 1) \right\} \quad (4)$$

$$A = \frac{-(1-q)p^2 \varepsilon^2}{4} \quad B = \frac{3-4\nu}{4(1-\nu)} \quad (5)$$

$$f(s) = 2 \ln 2 + \ln \left(\frac{2s-s^2}{\varepsilon^2} \right) + \frac{4(1-\nu)}{3-4\nu} \quad (6)$$

ここで c_s は横波の音速、 $\varepsilon = h/L$ 、 $q = \rho_1/\rho$ 、 $p = \omega L/c_s$ である。このようにして単一円筒介在物での散乱前後での変位の変化率を解析的に求めることができ、円筒気孔による弾性波の散乱により得られる平均変位は、入射波の伝播方向 x_3 の成分のみが存在することがわかった。

(3)~(6)式で表される積分方程式を数値的に解くと、規格化変位 $U_{s3}(s)$ は複素数として以下の形で得られる。

$$U_{s3}(s) = \text{Re } U_{s3}(s) + i \text{Im } U_{s3}(s) \quad (7)$$

また $U_{s3}(s)$ は入射波に対する散乱波の比を意味しているので、振幅の増幅度 R と位相の変化量 θ を用いて以下のように表すことができる。

$$U_{s3}(s) = \frac{y(t)}{x(t)} = R \cdot \exp(i\theta) \quad (8)$$

ここで $x(t)$, $y(t)$ はそれぞれ入射波と散乱波の変位場である。(7)式、(8)式より R と θ は規格化変位 $U_{s3}(s)$ の実部と虚部を用いて以下のように表される。

$$R = \sqrt{\{\operatorname{Re} U_{s3}(s)\}^2 + \{\operatorname{Im} U_{s3}(s)\}^2} \quad (9)$$

$$\theta = \tan^{-1} \left(\frac{\operatorname{Im} U_{s3}(s)}{\operatorname{Re} U_{s3}(s)} \right) \quad (10)$$

R および θ はマトリックス中に円筒介在物が1つ存在するときには数値的に求められるが、介在物が複数存在する場合は求められない。しかしながら周波数応答および伝達関数の概念を用いれば、簡単な系に関しては R , θ を推定することができる。

今、Fig.2 に示すように入射の伝播方向に垂直に複数の円筒介在物が存在する系を考える。介在物間の距離は入射波の波長の2倍以上とし、散乱波の相互作用の影響は無視する。このとき単一の円筒介在物を入射波が通過したときの周波数応答を $F(\omega)$ 、入射波が通過する円筒介在物の個数を N とおくと、入射波すなわち入力波 $X(\omega)$ と N 個の介在物による散乱波すなわち出力波 $Y(\omega)$ の関係は周波数応答 $F(\omega)$ を用いて以下のように表される。

$$Y(\omega) = \{F(\omega)\}^N X(\omega) \quad (11)$$

Fig.2 The system in which elastic waves propagate through a material including more than two spherical inclusions

ここで $F(\omega)$ は単一円筒介在物を通過するときの入力波と出力波の比で表されることから、これは先に述べた規格化変位 $U_{s3}(s)$ と等しいことがわかる。よって $F(\omega)$ は振幅の増幅度 R と位相の変化量 θ と関連付けることができ以下のように与えられる。

$$F(\omega) = \frac{Y(\omega)}{X(\omega)} = R \cdot \exp(i\theta) \quad (12)$$

(12)式から N 個の円筒介在物による散乱波 $Y(\omega)$ は以下のようになる。

$$Y(\omega) = R^N \exp(iN\theta) \cdot X(\omega) \quad (13)$$

またフーリエ逆変換により角周波数 ω を引数とした入力波 $X(\omega)$ 、出力波 $Y(\omega)$ から以下のような時間 t を引数とした入力波 $x(t)$ 、出力波 $y(t)$ の関係に変換できる。

$$y(t) = R^N \exp(iN\theta) \cdot x(t) \quad (14)$$

(14)式により N 個の介在物による散乱波の波形の変化について求めた。

3. 解析結果

Fig.3(a), (b) に $x_1=0$ における規格化変位 $U_{s3}(0)$ の振幅の増幅度 R と位相変化量 θ の無次元の周波数 p に対する変化の計算結果を示す。マトリックスと介在物の密度比 q の値により p の増加に対して R , θ の増加、減少の傾向が異なるこ

Fig.3 The effect of dimensionless frequency on R and θ for $q=0$ and $q=2$

とが見て取れる。ただし R , θ の変化量はともに p の増加に対して増加することがわかった。

Fig.4 に密度比 $q=0$ の時の異なる介在物数 N に対する出力波形の変化の結果について示す。入射波の周波数は 1.4MHz とする。単一の介在物のみの場合 ($N=1$ のとき)、出力波形の変化はほとんど確認できないが、 N が増加するに従って徐々に出力波形に変化が見られるようになる。このことから、円筒介在物による散乱波への影響は一つのみでは微小であるが、多数になるとその影響が大きくなることがわかった。

Fig.4 The effect of the number of inclusions on output waves for $q=0$

4. 結論

弾性平面入射波の円筒介在物上での散乱による振幅と位相の変化について考察した。単一の円筒介在物による散乱波の規格化変位を Lavrov らが提案した積分方程式を数値的に解き、そこから単一の介在物による振幅の増幅度 R と位相の変化量 θ を求めることが出来る。さらに入射波の単一の介在物通過による周波数応答を求めた、この周波数応答を複数回かけ合わせることで複数の介在物による振幅と位相の変化を求めた。得られた予測出力波形の結果から、入射波が通過する円筒介在物の個数が増えるに従って、出力波形が目に見える形で変化していくのがわかった。

参考文献

- (1) N.A. Lavrov and E.E. Pavrovskaya, J. Sound and Vibration, v.248, n.2 (2001) pp.329-350