218 角度伝達誤差の最小化を目指した 複列式トロコイド歯形減速機の転円板配置の最適設計

Optimization Design of the Plural Row Rolling Disc Displacement for Trocoid Tooth Reducers to Minimize Transmitted Angle Error

○正 掃部 雅幸 (川崎重工業) 非 高原 周平 (川崎重工業)
非 目黒 昇 (川崎重工業) 非 八木 栄一 (川崎重工業)

Masayuki KAMON, Syuhei TAKAHARA, Noboru Meguro, Eiichi YAGI
Kawasaki Heavy Industries, Ltd., 1-1, Kawasaki-Cho, Akashi

This paper describes an optimization design process of the rolling disc displacement of Trocoid tooth reducers. The reducers with plural row disc will have larger transmitted angle error than the reducers with single row disc. We analyze the mechanism that the reducer of the plural row disc causes larger angle error, and derive an optimal displacement angle of the plural row disc to minimize angle error. Simulation study and experimental trial show the strong effectiveness of this design process.

Key Words : Optimization Design, Trocoid Tooth Curve, Transmitted Angle Error

1. 緒言

トロコイド歯形減速機は、大型産業用ロボットの関節軸をはじめ、様々な産業機器に採用されており、「サイクロ減速機」「RV減速機」などの商標で知られている。この減速機は、一般の遊星歯車減速機に比べ、部品点数が多く、減速の仕組みは複雑になるが、サイズに比して大トルクを伝達できる特徴を有する。

減速機の主な性能指標の一つに、角度伝達誤差が挙げられる。角度伝達誤差の大きい減速機は、これを搭載する上位装置の静的な位置決め性能を劣化させるだけでなく、伝達トルクにリップルを与え、振動励起につながることもある。したがって、新型減速機の開発においては、この低減が要求される。角度伝達誤差を低減する手段として、最も直接的なものは、加工精度と組立精度を厳しくし、歯面や取り付け位置を理想曲線に近づけることである。しかし、それは製作コストの増大を招く。

今回我々は、加工・組立精度を標準値のまま、トロコイド歯形減速機の構成要素の一つである、転円板の偏心配置を最適化することで、角度伝達誤差の低減を試みた。本稿では、トロコイド歯形減速機の歯形曲線を解析し、転円板配置の最適設計の過程、および、その効果を報告する。

2. トロコイド歯形減速機の概要

2.1. 減速機の構成部品

トロコイド歯形減速機の模型図をFig.1に示す。トロコイド歯形減速機は、クランクシャフト、トロコイド歯形転円板、外側列円をなすピン、内側列円をなすローラを基本要素とし、これらに加え、これらを支えるハウジングや軸受けから構成されている。標準的な使用法としては、クラン

クシャフトの偏心回転を入力軸、列円ピンを固定軸、列円ローラの公転を出力軸とするものである。クランクシャフトを正に回転させると、転円板は列円ピンを逆向きに転がる。この転がりに押され、列円ローラは入力軸を中心に負に公転する。外側列円（以下、列円）の数を n とすると、転円板の歯数は $n-1$ であり、この減速機の減速比は $-(n-1)$ となる。

2.2. 複丁差型トロコイド歯形

トロコイド歯形減速機の応用的な型として、複丁差型と呼ばれるものがある。Fig.1のような標準型の減速機では、転円板の歯数と列円ピンの数との差が常に1であるが、複丁差型の場合には、これが $\nu=2,3,\dots$ となる。

複丁差型の転円板の歯形は次のようにして決まる。まず、列円数 n の標準型の転円板を描く。次に、転円板を現在の

Fig.1 Schematic Diagram of Trocoid Tooth Reducer
(case of $n=12$)

Fig.2 Outer Shape of the Rolling Disc of a 2-Tooth Gap Reducer (Case of $n=4$)

基準位相から、偏心軸を中心に $360^\circ / (v \cdot (n-1))$ だけシフトさせた転円板を描く。 $v \geq 3$ の場合は、シフトさせた転円板を基準にして、これを $v-2$ 回繰り返す。複丁差型の転円板の歯形は、これらの最内曲線区分で構成される。また、ピンの配置は、入力軸を中心に振り分ける。その結果、列円の数 $v \cdot n$ 、転円板の歯数は $v \cdot (n-1)$ となる。速比は $(n-1)$ のままである。Fig.2は、2丁差型の場合について、この手順を示している。

複丁差型の減速機では、同じ減速比であっても、転円板と接触するピンの数が増える。そのため、歯面面圧が低くなり、1丁差型に比べ、コンパクトで高剛性な減速機を構成できる。

2.3. 角度伝達誤差

角度伝達誤差とは、任意の回転角を入力軸に与えたときの、出力軸の理論回転角と実際の回転角との誤差である。入力軸の回転角を θ 、出力軸の回転角を Θ とするとき、角度伝達誤差は $e = \Theta - \theta / (n-1)$ で与えられる。標準公差で製作された減速機では、出力軸を1回転させると、角度伝達誤差は、列円数 n の数分、増減を繰り返す。一般的には、このときの最大値と最小値の差、または、その2分値が、その製品の角度伝達誤差の指標となる。

2.4. 複列式減速機と角度伝達誤差との関係

入力となるクランクシャフトと出力となる列円ローラの間、転円板を1枚組み込めば、減速機として成立する。しかし、歯面の強度確保や転円板の偏心回転に起因する振動低減を目的に、現在、市販されている減速機の多くは、位

相をずらした複数の転円板を搭載している。このような減速機を複列式減速機と称する。

通常、複列式減速機は、複数枚の転円板を均等分割に配置している。すなわち、2列式では 180° 間隔に、3列式では 120° 間隔に配置する。Fig.1の模型図は2列式である。これらの複列式減速機は、単列式減速機に比べ、角度伝達誤差が増大してしまう。

その理由は以下のようなものである。転円板の歯形は、トロコイド曲線と呼ばれる複雑な数学式により表現される。これを製作するには、曲線の補間処理が必要となる。一般には、設計や加工の効率化から、複数枚の転円板は同一の設計情報に基づく同一の工作機械により加工される。そのため、加工後の歯面と理論曲線との誤差は、大局的には複数枚で同じ特徴を有する。その結果、均等分割配置された複列式減速機では、たとえば、1枚の転円板に正の角度伝達誤差が生じるとき、他の転円板にも正の角度伝達誤差が生じる。その結果、列円ローラには、それらが合成された大誤差が生じてしまう。それゆえ、複列式減速機は、単列式減速機に比べ、角度伝達誤差が増大する。

しかし、複列式であっても、単列式以上に角度伝達誤差を低減できると考えられる。それは、1枚の転円板に正の誤差が生じるとき、他の転円板には負の角度伝達誤差が生じるよう、転円板を均等分割から適正量シフトさせて配置するのである。すると、列円ローラに伝達される角度誤差は、相殺低減されることになる。

このように、角度伝達誤差の低減効果が大きい転円板の適正なシフト角を見つめることができれば、製作コストの増大を伴うことなく、角度伝達誤差を低減することができる。本稿の目的は、この低減効果が最も大きい最適なシフト配置角を求めることである。

3. 転円板配置の最適設計

3.1. 最適化方針

転円板の最適配置を、「1枚の転円板が角度伝達誤差を最も生じやすい状態にあるとき、他の転円板がその状態から最も離れる状態を生み出す配置」として定義する。なぜなら、1枚の転円板が角度伝達誤差を最も生じやすい状態にあるとき、他の転円板もこの状態に近いと、角度伝達誤差が合成され増大するからである。

このような最適配置を考えるためには、まず、「転円板が角度伝達誤差を最も生じやすい状態」を解析する必要がある。角度伝達誤差を最も生じやすい状態とは、転円板のすべての凹点がすべての列円ピンを最も離れる状態であると考えられる。

減速機が滑らかに回転するためには、転円板と列円ピンの間に幾分か遊びが設けられる。この遊びによる角度伝達誤差を最も低減できるのは、曲率が最も負に大きい凹点と言える。この点の近傍にピンがあると、ピンが転円板の理論上の接触点と接してなくても、この近傍の別の点が生じだちにそのピンと接触し、誤差の増大を抑止することになる。一方、すべての凹点がいずれのピンからも離れている状態では、別の点が生じだちにそのピンと接触するまでに距離があり、角度伝達誤差が増大する。このように、すべての凹点から列円ピンが最も離れた状態を、列円最離状態と呼ぶ。

Fig.3 Movement of Pins around the Disc
(Case of $n=6$)

均等間隔に配置された複列式減速機では、すべての転円板が同時に列円最離状態に到達する。したがって、複列式減速機の角度誤差を低減するには、それぞれの転円板が列円最離状態に至るタイミングをずらすことが必要になる。

3.2. トロコイド曲線

転円板の最適配置を導くためには、列円最離状態を数式で表現する必要がある。本節では、トロコイド曲線の理論展開を行う⁽¹⁾⁽²⁾。

転円板の外周曲線、すなわち、トロコイド曲線は、 n, a_s, e_c, r_r の4つのパラメータにより決定される。

- n : 列円ピン数
- a_s : $2a_s$ は列円配置径
- e_c : クランク偏心長
- r_r : $2r_r$ は列円ピン直径

クランク偏心長と列円ピン直径を、列円配置径で正規化する。このとき、 α はトロコイド係数と呼ばれる。

$$e_c = a_s \alpha, \quad r_r = a_s \beta$$

減速機として使用する場合、列円の内周りを転円板が転がるが、ここでは、転円板は固定され、列円がその外周りを転がると考える。

このときの列円中心の転がり軌跡は、以下の式で与えられる。

$$C_p(q) = \{c_x, c_y\} \quad (1)$$

$$c_x = a_s (-\alpha \cos(q) + \cos(q/n))$$

$$c_y = a_s (-\alpha \sin(q) + \sin(q/n))$$

q は転円板の位相パラメータである。曲線の周期は $2\pi n$ 、隣り合う凹点間の位相差は $q=2\pi n/(n-1)$ である。

転円板の外周曲線は、この転がり軌跡を中心方向に距離 r_r だけ平行移動した曲線となる。

$$Z_p(q) = \{z_x, z_y\} \quad (5)$$

$$z_x = a_s (-\alpha(1-\beta n/L_z)\cos(q) + (1-\beta/L_z)\cos(q/n))$$

$$z_y = a_s (-\alpha(1-\beta n/L_z)\sin(q) + (1-\beta/L_z)\sin(q/n))$$

$$L_z^2 = 1 + \alpha^2 n^2 - 2\alpha n \cos(n/n \cdot q)$$

$q=0$ では0番目のピン p_0 は転円板の x 軸上の凹点にある。このとき、反時計回り順に i 番目のピン p_i は、転円板と $q=2\pi i$ の位置で接している。

Fig.3(a)に、転円板と列円ピンとの位置関係を描く。入力に回転が与えられ、転円板が転がるとき、列円ピン $p_0, p_1, \dots, p_{n-1}$ は、相対距離を保ったまま、位相を進めていく。

3.3. 列円最離状態

列円最離状態における、転円板と列円ピンとの位置関係をFig.3(b)に示す。列円最離状態では、隣り合う2つの凹点から最も近いピンまでの位相距離が等しくなる。また、これらは凹点全体の中で、最近接なピンとの接触点までの位相差が最も小さな2つである。

Fig.3を参照して、1丁差型の列円最離状態の位相 q_e を求めると、次のようである。

$$2\pi + q_e = 2\pi n/(n-1) - q_e$$

$$\therefore q_e = \pi/(n-1)$$

2丁差型の場合には、 $q_e = \pi/2(n-1)$ である。

3.4. 最適配置角の導出

まずは、3列式減速機を例に最適配置角を導く。3列式の場合、転円板の基本配置角は 120° である。

3枚の転円板を c_0, c_1, c_2 とし、それらの凹点から最も近いピンとの接触点の位相を、 q_0, q_1, q_2 とする。

初期状態で転円板 c_0 のみが凹点で列円と接触し、転円板 c_1, c_2 は凹点から位相差 q_{s1}, q_{s2} を有して接しているとする。ただし、 $0 \leq q_{s1}, q_{s2} \leq q_e$ である。 q_e を超える q_{s1}, q_{s2} では、 q_e 未満の q_{s1}, q_{s2} があり、それが以下の議論の対象となる。また、 $q_{s2} \geq q_{s1}$ とする。このとき、初期状態で3枚の転円板の凹点

Fig.4 Schematic Diagram of 3-Row Disc Reducer
(Case of $n=3$)

Tab.1 The Series of the Phase Changes of the Contact Point with the Pins

Case	step	q_0		q_1		q_2		Δq
		p_0	p_1	p_0	p_1	p_0	p_1	
1	0	0		$+q_{s1}$		$+q_{s2}$		
	1	$+q_c - q_{s2}$		$+q_c - q_{s2} + q_{s1}$		$+q_c$	$-q_c$	$q_c - q_{s2}$
	2	$+q_c - q_{s1}$		$+q_c$	$-q_c$	$-q_c + q_{s2} - q_{s1}$	$q_{s2} - q_{s1}$	$q_{s2} - q_{s1}$
	3	$+q_c$	$-q_c$	$-q_c + q_{s1}$		$-q_c + q_{s2}$		q_{s1}
2	0	0		$-q_{s1}$		$+q_{s2}$		
	1	$+q_c - q_{s2}$		$+q_c - q_{s2} + q_{s1}$		$+q_c$	$-q_c$	$q_c - q_{s2}$
	2	$+q_c$	$-q_c$	$+q_c - q_{s1}$		$-q_c + q_{s2}$	q_{s2}	q_{s2}
	3	$-q_c + q_{s1}$		$+q_c$	$-q_c$	$-q_c + q_{s2} + q_{s1}$	q_{s1}	q_{s1}
3	0	0		$+q_{s1}$		$-q_{s2}$		
	1	$+q_c - q_{s1}$		$+q_c$	$-q_c$	$+q_c - q_{s2} - q_{s1}$		$q_c - q_{s1}$
	2	$+q_c$	$-q_c$	$-q_c + q_{s1}$		$+q_c - q_{s2}$		q_{s1}
	3	$-q_c + q_{s2}$		$-q_c + q_{s2} + q_{s1}$	$+q_c$	$-q_c$		q_{s2}
4	0	0		$-q_{s1}$		$-q_{s2}$		
	1	$+q_c$	$-q_c$	$+q_c - q_{s1}$		$+q_c - q_{s2}$		q_c
	2	$-q_c + q_{s1}$		$+q_c$	$-q_c$	$-q_c - q_{s2} + q_{s1}$		q_{s1}
	3	$-q_c + q_{s2}$		$-q_c + q_{s2} + q_{s1}$	$+q_c$	$-q_c$		$q_c - q_{s1}$

に最も近いピンの配置は、Fig.4の4つのケースに限られる。

Case 1,2,3,4の初期状態から転円板が時計回りに偏心回転、すなわち、ピンが転円板の周りを反時計回りに公転していくとする。このとき、それぞれの転円板が凹点に最も近いピンと接触する接触点の位相 q_0, q_1, q_2 は、Tab.1の通りに移り変わる。そして、 $q_i (i=0,1,2)$ が列円最離位相 q_c に到達すると、以降は c_i にとって凹点に最も近いピンは次の列円ピンに移る。

1つの転円板が列円最離状態にあるとき、他の2つの転円板が共に列円最離状態を最も離れている状態とは、それら2つの転円板の接触点位相の差が等しくなる状態である。そこで、表を参照して、 $q_i = q_c$ のとき $|q_i| = |q_k|$ となる q_{s1}, q_{s2} を求めれば以下のようなのである。

Case 1: $q_{s1} = q_{s2} = 0$

Case 2: $q_{s1} = q_{s2} = 0$ または、 $q_{s1} = q_{s2} = 2/3 * q_c$

Case 3: $q_{s1} = q_{s2} = 0$ または、 $q_{s1} = q_{s2} = 2/3 * q_c$

Case 4: $q_{s1} = q_{s2} = 0$

$q_{s1} \geq q_{s2}$ とした場合も、同じ解しか得られない。

$q_{s1} = q_{s2} = 0$ の解は、位相差0の基準状態であり、すなわち、角度伝達誤差の増大を最も助長する最悪配置を意味する。したがって、最適解は $q_{s1} = q_{s2} = 2/3 * q_c$ である。

さて、Case 2とCase 3の配置では、Case 2が好ましいと言える。この2つのケースで、角度伝達誤差の低減効果は同等であるが、転円板の偏心性を相殺する効果は、Case 2の方が常に大である。

最適な位相差 q_0 から、最適なシフト配置角 Q_0 を導くと、以下ようになる。

Optimal Shift Angle: Q_0 , such as $P_s(Q_0) = P_c(q_c)$
where

$$P_s(Q_0) = \begin{pmatrix} ec \cos(Q_0) + R_s \cos(-Q_0/n + Q_0) \\ ec \sin(Q_0) + R_s \sin(-Q_0/n + Q_0) \end{pmatrix}^T$$

$$R_s = \|Z_p(q_0)\|, Q_s = \text{atan}[Z_p(q_0)]$$

$$P_c(q_c) = (aa + rr \cos(q_c), rr \sin(q_c))^T$$

$$q_c = n/(n-1) \arccos[(1 + \alpha^2 n^3)/(\alpha n(n+1))]$$

$$q_0 = 2/3 q_c$$

次に、2列式減速機の場合を考える。2列式では、一方の転円板が列円最離状態にあるとき、もう一方の転円板が凹点で外ピンと接触していればよいから、最適シフト位相角は $q_{s1} = q_c$ である。上式の $q_0 = 2/3 q_c$ の代わりに、 $q_0 = q_c$ を代入すれば、最適配置シフト角 Q_0 が同様に求められる。

4. 最適設計の効果

4.1. 機構解析シミュレーションによる確認

以下の条件に従い、角度伝達誤差のシミュレーションを実施した。

シミュレーションツール: WorkingModel 2D

積分精度: $1[\mu\text{m}]$ ($0.0002[\text{arc sec}]$ 未満)

Model Z: 単列式、2丁差、転円板補間線分数 1218
 $n=30, a_s=123, e_c=3, r_r=4.5$

Model A: 3列式、2丁差、転円板補間線分数 1218
 $n=30, a_s=123, e_c=3, r_r=4.5$

Model B: 2列式、2丁差、転円板補間線分数 1170
 $n=40, a_s=135.5, e_c=3, r_r=4$

Model Zは、単列式の減速機である。実機製作時の組立公差を考慮して、列円ピンは放射状外向きに $1[\mu\text{m}]$ だけずらして配置している。入力軸を2回転したときの角度伝達誤差のシミュレーション結果を、Fig.5に示す。最大値は片振幅で $4.1[\text{arc sec}]$ であった。入力軸1回転内に誤差の波形

Fig.5 Angle Error Transmitted of Model Z

Fig.6 Kinematical Model of Model A for WM2D

(a) Displacement Angle is $\pm 120.0[\text{deg}]$ (b) Displacement Angle is $\pm 122.0[\text{deg}]$ (c) Displacement Angle is $\pm 121.5[\text{deg}]$ (d) Displacement Angle is $\pm 122.5[\text{deg}]$

Fig.7 Angle Error Transmitted of Model A (Thick Line: Error by c_0 Disc, Thin Line: Error by Output Disc)

は何度も正負を反転させている。これは、歯形の補間誤差によるものと考えられる。

Model Aは、Model Zと同じ基本パラメータで3列式にしたものである。列円ピンの配置公差も同様に放射状外向きに $1[\mu\text{m}]$ としている。シミュレーションのモデルをFig.6に、角度伝達誤差の波形をFig.7に示す。

まず、配置角 $\pm 120^\circ$ の均等分割配置の場合の波形をFig.7(a)に示す。1枚の転円板に生じる誤差の最大値は、Model Zと同等であるものの、出力軸の最大値は $7.8[\text{arc sec}]$ に増大した。ほとんどの場合で、1枚の転円板に生じる角度伝達誤差が極大・極小をとる時、出力軸のそれも極大・極小をとる。これは、1枚の転円板に正の角度伝達誤差が生じるとき、他の転円板でも同様の誤差を生じるため、出力軸ではこれらが合成され、その結果、角度伝達誤差が増大したと言える。

次に、前節の最適配置の計算式に従い、Model Aの最適シフト角を計算したところ、 $Q_0=2^\circ$ であった。そこで、配置角配置角 $\pm 122^\circ$ としたときの角度伝達誤差の波形をFig.7(b)に示す。出力軸の角度伝達誤差の最大値は $3.8[\text{arc sec}]$ に低減し、単列式よりも低い値となった。1枚の転円板で生じる誤差の波形が極大・極小をとる時、出力軸の誤差は必ずしも極大・極小をとっていない。これは、個々の転円板で生じる角度誤差を3枚でうまく相殺し、出力に伝達されたと言える。さらに、個々の転円板も出力軸を介して、他の転円板から拘束を受け、誤差を低減している。そして、出力軸の誤差の波形は入力軸一回転内には1.5周期分しか現れない。これは、転円板の回転に換算すると、転円板の1枚の歯と接触するピンが2つ進んだことに相当する。つ

まり、このモデルでは、角度伝達誤差に寄与しているのは、列円ピンの配置径公差のみであり、歯形の補間誤差はほぼ無効になったと言える。

最適配置の効果を確認するため、配置角 $\pm 121.5^\circ$ のモデル、配置角 $\pm 122.5^\circ$ のモデルでも、角度伝達誤差をシミュレーションした。結果を、Fig.7(c)(d)に示す。出力軸の誤差の最大値はともに $5.7[\text{arc sec}]$ であった。均等分割時に比べると、最大値は低減しているものの、その効果は最適配置に比べ、明らかな差がある。

Fig.8 Kinematical Model of Model B for WM2D

Fig.9 Angle Error Transmitted of Model B

Fig.10 Experimental System

Model B は、2 列式減速機である。シミュレーションモデルを Fig.10 に示す。列円ピンの配置公差には、0 と 10[μm] の 2 種類を与える。この減速機の最適シフト角は、 $Q_0=2.25^\circ$ と計算される。

転円板の配置角を均等配置 180° から様々に変更し、角度伝達誤差を求めた。そして、その標準偏差を計算し、グラフにしたものを Fig.9 に示す。この結果からは、最適配置角 182.25° が必ずしも最適であるとは言えない。しかし、最適配置は最悪の条件を最大に改善するよう定義されている。すなわち、ロバスト性を優先しており、実機の個体差など、個々の条件に対して常に誤差を最小化するわけではない。Fig.9 の結果からは、計算式によって求められた最適配置角 182.25° は、予測できない組立誤差（この場合ピン配置径）があっても、均等配置に比べ十分な効果によって、誤差を低減していると言える。

4.2 試作機実験による確認

Model A と同一のパラメータを有する試作機を製作し、角度伝達誤差の計測実験を行った。実験装置のシステム構

(a) Displacement Angle is $\pm 120.0[\text{deg}]$ (b) Displacement Angle is $\pm 122.0[\text{deg}]$

Fig.11 Angle Error Transmitted of Test Pieces

成を Fig.10 に示す。試作機は (a) 均等配置型と (b) 最適配置型の二つであり、転円板の配置角以外は同じ条件によって製作した。

入力側と出力側の 2 つのエンコーダで計測した回転量から、角度伝達誤差を求めた。その結果を Fig.11 に示す。均等配置型の減速機に比べ、最適配置型の減速機では、最大値、および、標準偏差が 40% 低減している。したがって、転円板の配置角を最適化した効果が、実機においても確認された。

5. 結言

本稿では、トロコイド歯形減速機の概要について解説し、減速機の重要な性能指標の一つである角度伝達誤差の低減を目指した、転円板配置の最適設計について考察した。そして、1 枚の転円板が角度伝達誤差を最も生じやすい状態、すなわち、列円最離状態にあるとき、他の転円板ではそれから最も離れた状態になるよう、複数枚の転円板を配置することを提案した。機構解析ソフトによるシミュレーション、および、試作機による計測実験により、転円板配置の最適化による角度伝達誤差の低減効果を確認し、本最適設計の考察プロセスが妥当的であることを示すことができた。

参考文献

- (1) 保原「トロコイド嚙合の理論と応用」、機械の研究、第 13 巻第 8 号、pp.1072-1076 (1961)
- (2) 本多、牧野「トロコイド歯車に関する研究 (第 1 報)」、精密工学会誌、第 60 巻第 7 号、pp.949-pp.953 (1994)