220 半正定値計画法を用いた応力制約を有するトラスのロバスト性最大化

Robust Truss Optimization under Stress Constraints
by using Semidefinite Program

○ 寒野 善博 (京都大) 竹脇 出 (京都大)

Yoshihiro KANNO and Izuru TAKEWAKI
Kyoto University, Sakyo, Kyoto 606-8501

A robust truss optimization scheme, as well as an optimization algorithm, is presented based on the robustness function. Under the uncertainties of external forces modeled by using the info-gap decision theory, we formulate the maximization problem of the robustness function. A sequential semidefinite programming method is proposed which has the global convergent property. It is shown, in numerical examples, that optimum designs of various trusses can be found without any difficulty.

Key Words: Robust optimization, Info-gap model, Semidefinite program, Interior-point method, Successive linearization method

1. 序

近年、構造系が持つ種々のパラメータの不確定性に対するロバスト性(頑強性)を考慮した設計法が注目を集めている。その多くは、不確定なパラメータの変動に対する構造物の感受性や信頼性を表す種々の指標を導入することで、ロバストな設計を得ることを意図している[1-7]。

構造系が持つパラメータの不確定性のモデルには、大別して確率論的モデルと非確率論的モデルの2つがある。確率論的不確定性モデルは、例えば、構造物の性能制約が満たされない確率(failure probability)を最小化する信頼性設計に用いられる[1, 2]。Doltsinis and Kang [3]は、多目的最適化手法に基づき、要求性能の期待値と標準偏差の双方を最小化する問題を定式化した。

一方、非確率論的不確定性のモデルとしては、凸モデル(convex model)解析[8]がよく知られており、これに基づくトラスのロバスト最適化手法も提案されている[4]。また、Ben-Tal and Nemirovski [9]は、種々の錐線形計画問題[10]の係数が不確定性を含む場合のロバスト最適化の概念と手法を提案し、不確定な外力を受けるトラスのコンプライアンス最小化問題を解いた[5]。Han and Kwak [6]は、構造物の要求性能を定める関数の感度係数の l_∞ ノルムを最小化することで、大きなロバスト性を有する構造物を得る手法を提案した。曾我部[7]は多目的最適化手法に基づき、骨組の崩壊荷重の感度係数と構造質量の双方を最小化する問題を定式化した。

Ben-Haim [11]はインフォ・ギャップ決定理論(info-gap decision theory)に基づき、ロバスト性の指標としてロバストネス関数(robustness function)を提案した。ここでは、構造系のパラメータが非確率論的不確定性を持つことを仮定し、その不確定性のレベルを1つのパラメータ

α を用いて表す。ロバストネス関数 $\hat{\alpha}$ は、構造系が必ず性能制約を満たすような α の最大値として定義される[12]。

確率論的不確定性モデルに基づく信頼性理論では、不確定なパラメータの確率分布や変動の大きさを推定する必要がある。実際には、これらの統計量を正確に予測することは極めて困難な場合が多い。これに対して、ロバストネス関数の利点は、不確定なパラメータに関する統計量が一切必要ないことである[11, 12]。しかし、ロバストネス関数を用いた構造物のロバスト最適設計法は、著者らの知る限り提案されていない。

本稿の目的は、不確定な外力を受けるトラスに対し、ロバストネス関数に基づく新しいロバスト設計法の枠組みと解法を提案することにある。

ロバストネス関数は、無限個の制約条件を持つ数理計画問題の最適値として定義される[11]。従って、ロバストネス関数を求めること自体が、一般には極めて困難である。本稿ではまず、応力制約を持つトラスに対し、そのロバストネス関数が半正定値計画問題(semidefinite programming problem, SDP問題)[10]を解くことで得られることを示す。SDPは、線形計画法や凸2次計画法などを含む凸計画法であり、主双対内点法と呼ばれる効率の良い解法が知られている[10]。次に、トラスのロバスト最適設計法として、そのロバストネス関数を最大化する設計問題を定式化する。さらに、SDP問題を繰り返し解くことで、最適設計解を効率よく得る手法を提案する。信頼領域法と類似の考え方をい、アルゴリズムが大域的収束性を持つことを示す。

2. ロバストネス関数と半正定値計画法

本稿では、ベクトル $\mathbf{p} \in \mathbf{R}^n$ の (Euclid) ノルムを

$\|p\| = (p^T p)^{1/2}$ と書く。また、 $n \times n$ 実対称行列全体の集合を $S^n \subset \mathbf{R}^{n \times n}$ で表す。

2.1. 応力制約に関するロバストネス関数

本節では、応力制約を持つトラスのロバストネス関数が、無限個の制約条件を持つ数理計画問題の最適値として得られることを示す。

3次元空間内のトラスを考え、微小変形および線形弾性を仮定する。変位の自由度を n^d とおき、 $u \in \mathbf{R}^{n^d}$ を節点変位、 $f \in \mathbf{R}^{n^d}$ を外力とする。トラスの剛性行列を $K \in S^{n^d}$ とおくと、釣合式は

$$Ku = f \quad (1)$$

で与えられる。部材数を n^m とおき、部材断面積から構成されるベクトルを $a = (a_i) \in \mathbf{R}^{n^m}$ とする。ここで、 $\text{rank}(\partial K / \partial a_i) = 1$ を用いると、定ベクトル $b_i = (b_{ij}) \in \mathbf{R}^{n^d}$ を用いて K は次式のように表すことができる。

$$K(a) = \sum_{i=1}^{n^m} a_i b_i b_i^T. \quad (2)$$

ヤング係数を E 、第 i 部材の許容応力を $\sigma_i^c > 0$ とおくと、(2) より、応力制約は次式で与えられる。

$$|\sqrt{E} b_i^T u| \leq \sigma_i^c \quad (i = 1, \dots, n^m). \quad (3)$$

以下では、(3) を特別な場合として含む制約条件

$$u \in \mathcal{F} := \left\{ u \in \mathbf{R}^{n^d} \mid \begin{aligned} &|d_l^T u - v_l| \leq u_l^c \quad (l = 1, \dots, n^c) \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

を考える。ここで、 $\mathbf{R}^{n^c} \ni u^c = (u_l^c) \geq 0$ 、 $d_l \in \mathbf{R}^{n^d}$ 、 $v_l \in \mathbf{R}$ ($l = 1, \dots, n^c$) は定数である。

f の公称値を $\tilde{f} \in \mathbf{R}^{n^d}$ とおく。 $\tilde{f}$ 、 $\alpha \geq 0$ に対し、 f の不確定性集合 (uncertainty set) を $\mathcal{T}(\alpha, \tilde{f}) \subset \mathbf{R}^{n^d}$ で表す。本稿では、インフォ・ギャップモデル (info-gap model) [11] に基づき、 $\mathcal{T}$ が不確定性を表すパラメータ $\zeta \in \mathbf{R}^{n^d}$ を用いて次のように表される場合を考える。

$$\mathcal{T}(\alpha, \tilde{f}) = \left\{ \tilde{f} + \zeta \mid \alpha \geq \|\zeta\| \right\}. \quad (5)$$

不確定な外力 $f \in \mathcal{T}(\alpha, \tilde{f})$ に対する釣合式(1)の解 u 全体の集合を $\mathcal{U}(\alpha, a) \subseteq \mathbf{R}^{n^d}$ とおく。即ち、

$$\mathcal{U}(\alpha, a) = \left\{ u \in \mathbf{R}^{n^d} \mid \begin{aligned} &K(a)u = f, \\ &\text{for some } f \in \mathcal{T}(\alpha, \tilde{f}) \end{aligned} \right\}.$$

制約条件(4)に関するロバストネス関数 $\hat{\alpha} : \mathbf{R}^{n^m+n^c} \mapsto [0, +\infty]$ は、次式で定義される (Ben-Haim [11, Ch. 3])。

$$\alpha^* = \max \{ \alpha : u \in \mathcal{F} \quad \forall u \in \mathcal{U}(\alpha, a) \}, \quad (6)$$

$$\hat{\alpha}(a, u^c) = \begin{cases} \alpha^* & \text{(問題 (6) が実行可能),} \\ 0 & \text{(問題 (6) が実行不能).} \end{cases} \quad (7)$$

$a^1 \in \mathbf{R}^{n^m}$ および $a^2 \in \mathbf{R}^{n^m}$ が条件 $\hat{\alpha}(a^1, u^c) > \hat{\alpha}(a^2, u^c)$ を満たすとき、 a^1 は a^2 よりもロバスト性が大きいという。 $\hat{\alpha}(a^1, u^c) \geq \|\zeta^1\|$ を満たす ζ^1 に対して $|d_l^T u - v_l| = u_l^c$ が成立する $l \in \{1, \dots, n^c\}$ が存在するとき、 ζ^1 は最悪事例 (worst case) であるという。

このように、ロバストネス関数 $\hat{\alpha}$ は問題 (6) の最適値として得られる。しかし、不確定パラメータ ζ は無限に存在するため、問題 (6) は無限個の制約条件を含む。従って、実際にその解を求めることは極めて困難である。そこで、第4節では、問題 (6) をSDP問題に変換する。

2.2. 半正定値計画問題

半正定値対称行列全体の集合を $S_+^n \subset S^n$ で表す。記号 $P \succeq O$ は $P \in S_+^n$ を、また $P \succeq Q$ は $P - Q \in S_+^n$ を意味する。行列 $P = (P_{ij}) \in S^n$ と $Q = (Q_{ij}) \in S^n$ の内積を $P \bullet Q = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n P_{ij} Q_{ij}$ で定義する。

$X \in S^n$ を変数とする次の数理計画問題を、半正定値計画問題 (semidefinite programming problem, SDP 問題) の等式標準形の主問題と呼ぶ [10]。

$$\left. \begin{aligned} \min \quad & C \bullet X \\ \text{s.t.} \quad & A_i \bullet X = b_i \quad (i = 1, \dots, m), \\ & S^n \ni X \succeq O. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

ここで、 $A_i \in S^n$ ($i = 1, \dots, m$)、 $b = (b_i) \in \mathbf{R}^m$ 、 $C \in S^n$ は定行列および定ベクトルである。問題 (8) の双対問題は、 $y \in \mathbf{R}^m$ を変数とする次の問題で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} \max \quad & b^T y \\ \text{s.t.} \quad & C - \sum_{i=1}^m A_i y_i \succeq O. \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

SDP 問題 (8) および(9)の制約条件は、線形行列不等式 (linear matrix inequality) と呼ばれ、双方の問題の実行可能領域は凸集合であることが知られている [10]。

半正定値計画法は線形計画法や凸2次計画法などを含んでおり、従来よりも広い範囲の凸計画問題を扱うことができる。さらに、主双対内点法と呼ばれる効率の良い解法が提案され [10]、それに基づくソフトウェアもいくつか実装されている [13]。このためSDPは、システム制御への応用、組合せ最適化問題などの様々な分野で注目されている [9, 10]。著者らは、SDPを繰り返し用いることで、線形座屈荷重係数の制約の下での構造物のトポロジー最適化問題に対し、最適解で座屈荷重係数が多数重複する場合にも効率よく解を得る手法を提案した [14]。

3. ロバストネス関数の例

本節では、ロバストネス関数の概念を説明するために、Fig. 1に示す2自由度トラスのロバストネス関数を解析的に求める。節点 (a) はピン支持されており、節点 (b) および (c) には、それぞれ、外力 f_1 および f_2 が作用する。節点 (b) および (c) の変位を u_1 および u_2 とおく。また、部材 (1) と (2) の部材長は等しい。部材断面積を a_i ($i = 1, 2$) とおくと、部材応力 σ_i は

$$\sigma_1 = \frac{f_1 + f_2}{a_1}, \quad \sigma_2 = \frac{f_2}{a_2} \quad (10)$$

Fig. 1: Two-degrees-of-freedom truss.

で与えられる. 定数 $\sigma_i^c > 0$ を与え, 応力制約

$$|\sigma_i| \leq \sigma_i^c \quad (i = 1, 2) \quad (11)$$

を考慮する.

f_1 および f_2 の公称値を $\tilde{f} > 0$ とおく. インフオ・ギャップ不確定性モデル [11] に基づき, (f_1, f_2) が不確定性パラメータ ζ を用いて

$$f_1 = f_2 = \tilde{f} + \zeta, \quad \alpha \geq |\zeta|, \quad \alpha \geq 0 \quad (12)$$

で表されることを仮定する. ただし, 不確定集合の定義(12)は(4)とは異なる. ロバストネス関数 $\hat{\alpha}(\mathbf{a}, \boldsymbol{\sigma}^c)$ の定義は, (12) を満たす任意の (f_1, f_2) に対して条件(11) が満たされる α の最大値である. $\tilde{f} > 0$ より, 次式が得られる.

$$\max_{\zeta \in \mathbf{R}} \{|\sigma_1| : \alpha \geq |\zeta|\} = \frac{2(\tilde{f} + \alpha)}{a_1}, \quad (13a)$$

$$\max_{\zeta \in \mathbf{R}} \{|\sigma_2| : \alpha \geq |\zeta|\} = \frac{\tilde{f} + \alpha}{a_2}. \quad (13b)$$

$\tilde{f} = 9.8 \text{ N}$, $\sigma_i^c = 1.96 \times 10^4 \text{ Pa}$ とおく. 以下の 2 つの部材断面積ベクトルを考える.

$$\mathbf{a}^1 = (15, 15)^\top \text{ cm}^2, \quad \mathbf{a}^2 = (20, 10)^\top \text{ cm}^2.$$

ただし, $\mathbf{a}_1$ と $\mathbf{a}_2$ の構造質量は等しい. 最初に $\mathbf{a} = \mathbf{a}_1$ とおく. (13) より, $\max\{|\sigma_1| : \alpha \geq |\zeta|\}$ は $\alpha = 4.9 \text{ N}$ において σ_1^c に到達する. 一方, $\max\{|\sigma_2| : \alpha \geq |\zeta|\}$ は $\alpha = 19.6 \text{ N}$ において σ_2^c に到達する. 以上より, $\hat{\alpha}(\mathbf{a}^1, \boldsymbol{\sigma}^c) = 4.9 \text{ N}$ が得られる. 従って, 外力が(12) および $\alpha \leq 4.9 \text{ N}$ を満たすならば, 制約条件(11) が必ず満たされる. また, 最悪事例 (worst case) は $f_1 = f_2 = 14.7 \text{ N}$ であり, このときに部材 (1) の応力制約がアクティブになる. 同様に, $\mathbf{a} = \mathbf{a}^2$ に対して $\hat{\alpha}(\mathbf{a}^2, \boldsymbol{\sigma}^c) = 9.8 \text{ N}$ が得られる. 従って, $\hat{\alpha}(\mathbf{a}^1, \boldsymbol{\sigma}^c) < \hat{\alpha}(\mathbf{a}^2, \boldsymbol{\sigma}^c)$, 即ち, $\mathbf{a}^2$ は $\mathbf{a}^1$ よりもロバスト性が大きいことが分かる.

一般のトラスに対しては, 本節のようにロバストネス関数を解析的に求めることは極めて困難である. 第 4 節では, ロバストネス関数を効率よく求める手法を提案する.

4. ロバストネス関数の SDP による定式化

本節を通じて, 問題 (6) が実行可能であることを仮定する. 次の命題は, SDP を用いると問題 (6) の解が容易に得られることを主張している.

命題 4.1. $t \in \mathbf{R}$, $\boldsymbol{\rho} = (\rho_l) \in \mathbf{R}^{n^c}$, $\mathbf{a} \in \mathbf{R}^{n^m}$ に対し

て, 行列 $\mathbf{G}_l \in \mathbf{S}^{n^d+1}$ ($l = 1, \dots, n^c$) を

$$\mathbf{G}_l(t, \boldsymbol{\rho}, \mathbf{a}) = \begin{pmatrix} \mathbf{G}_{l11} & \mathbf{g}_{l12} \\ \mathbf{g}_{l12}^\top & g_{l22} \end{pmatrix}, \quad (14a)$$

$$\mathbf{G}_{l11} = -\rho_l \mathbf{d}_l \mathbf{d}_l^\top + \mathbf{K}(\mathbf{a}) \mathbf{K}(\mathbf{a}), \quad (14b)$$

$$\mathbf{g}_{l12} = \rho_l v_l \mathbf{f}_l - \mathbf{K}(\mathbf{a}) \tilde{\mathbf{f}}, \quad (14c)$$

$$g_{l22} = -t + \tilde{\mathbf{f}}^\top \tilde{\mathbf{f}} \quad (14d)$$

で導入する. 与えられた $(\mathbf{a}, \mathbf{u}^c) \in \mathbf{R}^{n^m} \times \mathbf{R}^{n^c}$ に対し, ロバストネス関数 $\hat{\alpha}(\mathbf{a}, \mathbf{u}^c)$ の 2 乗は $(t, \boldsymbol{\rho}) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}^{n^c}$ を変数とする次の SDP 問題の最適値に一致する.

$$\hat{\alpha}(\mathbf{a}, \mathbf{u}^c)^2 = \max \{t : \mathbf{G}_l(t, \boldsymbol{\rho}, \mathbf{a}) \succeq \mathbf{O}, \quad \rho_l \geq 0 \quad (l = 1, \dots, n^c)\}. \quad (15)$$

証明. 行列 $\mathbf{Q}_{0l}$ ($l = 1, \dots, n^c$), $\mathbf{Q}_1$ を

$$\mathbf{Q}_{0l} = \begin{pmatrix} -\mathbf{d}_l \mathbf{d}_l^\top & v_l \mathbf{d}_l \\ v_l \mathbf{d}_l^\top & (u_l^c)^2 - v_l^2 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{Q}_1 = \begin{pmatrix} -\mathbf{K} \mathbf{K} & \mathbf{K} \tilde{\mathbf{f}} \\ \tilde{\mathbf{f}}^\top \mathbf{K} & \alpha^2 - \tilde{\mathbf{f}}^\top \tilde{\mathbf{f}} \end{pmatrix}$$

で定義する. このとき, 条件 $\mathbf{u} \in \mathcal{F}$ は

$$(\mathbf{u}^\top, 1) \mathbf{Q}_{0l} (\mathbf{u}^\top, 1)^\top \geq 0 \quad (l = 1, \dots, n^c)$$

に等価である. また, 条件 $\mathbf{u} \in \mathcal{U}$ は

$$(\mathbf{u}^\top, 1) \mathbf{Q}_1 (\mathbf{u}^\top, 1)^\top \geq 0$$

に等価である. 従って, 問題 (6) の制約条件

$$\mathbf{u} \in \mathcal{U} \implies \mathbf{u} \in \mathcal{F}$$

は, S-Lemma [9, § 4.10.5] を用いると

$$\exists \eta_l \geq 0, \quad \mathbf{Q}_{0l} - \eta_l \mathbf{Q}_1 \succeq \mathbf{O} \quad (l = 1, \dots, n^c) \quad (16)$$

に帰着できる. さらに, $\eta_l = 0$ は(16) を満たさないの
で, (16) は

$$\exists \rho_l \geq 0, \quad \rho_l \mathbf{Q}_{0l} - \mathbf{Q}_1 \succeq \mathbf{O} \quad (l = 1, \dots, n^c)$$

に等価である. 以上より, 問題 (6) は

$$\hat{\alpha}(\mathbf{a}, \mathbf{u}^c) = \max \{\alpha : \mathbf{G}_l(\alpha^2, \boldsymbol{\rho}, \mathbf{a}) \succeq \mathbf{O}, \quad \rho_l \geq 0 \quad (l = 1, \dots, n^c)\} \quad (17)$$

に帰着される. 問題 (17) において α を最大化することは α^2 を最大化することと等価であるので, 題意が得られる. $\square$

元の問題 (6) が無限個の制約条件を持っているの比べ, SDP 問題 (15) のサイズは n^d および n^c の多項式で押さえられていることが重要である. さらに, 主双対内点法 [10] を用いると SDP 問題 (15) は容易に解くことがで

きる。従って、命題 4.1 を用いると、ロバストネス関数を効率よく求めることができる。

5. ロバストネス関数最大化問題

第 2.1 節で述べたように、ロバストネス関数が高いほど、トラスの持つロバスト性は大きいと考えられる。本節の目的は、ロバストネス関数を最大化する部材断面積ベクトル $\mathbf{a}$ を求めることである。以降では、この構造最適化問題をロバストネス関数最大化問題と呼ぶ。

$\mathbf{a}$ を変数とし、部材の総体積に関する制約

$$\sum_{i=1}^{n^m} \ell_i a_i \leq \bar{V} \quad (18)$$

を考慮する。ここで、 ℓ_i は第 i 部材の長さ、 $\bar{V} > 0$ は部材の総体積の上限値である。 $\mathbf{u}^c$ および $\bar{V}$ を与えると、ロバストネス関数最大化問題は次式で定義される。

$$\left. \begin{array}{l} \max_{\mathbf{a} \in \mathbf{R}^{n^m}} \hat{\alpha}(\mathbf{a}, \mathbf{u}^c) \\ \text{s.t.} \quad \mathbf{a} \geq \mathbf{0}, \quad \sum_{i=1}^{n^m} \ell_i a_i \leq \bar{V}. \end{array} \right\} \quad (19)$$

ここで、問題 (19) の目的関数を $\hat{\alpha}(\mathbf{a}, \mathbf{u}^c)^2$ に置き換えても最適解が変わらないことに注意すると、命題 4.1 より問題 (19) は $(t, \boldsymbol{\rho}, \mathbf{a}) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}^{n^c} \times \mathbf{R}^{n^m}$ を変数とする次の問題に帰着できる。

$$\left. \begin{array}{l} \max \quad t \\ \text{s.t.} \quad \mathbf{G}_l(t, \boldsymbol{\rho}, \mathbf{a}) \succeq \mathbf{O}, \quad \rho_l \geq 0 \\ \quad \quad (l = 1, \dots, n^c), \\ \quad \quad \sum_{i=1}^{n^m} \ell_i a_i \leq \bar{V}, \quad \mathbf{a} \geq \mathbf{0}. \end{array} \right\} \quad (20)$$

問題 (20) は、 $(t, \boldsymbol{\rho}, \mathbf{a})$ の非線形関数である行列 $\mathbf{G}_l$ が半正定値である、という制約条件を含んでいる。そこで、問題 (20) を解くために、逐次半正定値計画法を提案する。

以下では、簡単のため $\mathbf{x} = (t, \boldsymbol{\rho}, \mathbf{a})$ と書くことができる。(14) で定義される写像 $\mathbf{G}(\cdot)$ の $\mathbf{x}'$ における微分を $D\mathbf{G}(\mathbf{x}')$ で表し、任意の $\mathbf{h} = (h_i) \in \mathbf{R}^{n^c+n^m+1}$ に対して

$$D\mathbf{G}(\mathbf{x}')\mathbf{h} = \sum_{i=1}^{n^c+n^m+1} \frac{\partial \mathbf{G}_l(\mathbf{x})}{\partial x_i} \Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}'} h_i$$

を満たすように定義する。 $(\Delta t, \Delta \boldsymbol{\rho}, \Delta \mathbf{a}) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}^{n^c} \times \mathbf{R}^{n^m}$ を変数とする次の SDP 問題を考える。

$$\left. \begin{array}{l} \max \quad \Delta t - \frac{1}{2} c^k \|(\Delta t, \Delta \boldsymbol{\rho}, \Delta \mathbf{a})\|^2 \\ \text{s.t.} \quad \Delta \mathbf{a} + \mathbf{a}^k \geq \mathbf{0}, \quad \Delta \boldsymbol{\rho} + \boldsymbol{\rho}^k \geq \mathbf{0}, \\ \quad \quad \sum_{i=1}^{n^m} \ell_i (\Delta a_i + a_i^k) \leq \bar{V}, \\ \quad \quad D\mathbf{G}_l(t^k, \boldsymbol{\rho}^k, \mathbf{a}^k)(\Delta t, \Delta \boldsymbol{\rho}, \Delta \mathbf{a}) \\ \quad \quad \quad + \mathbf{G}_l(t^k, \boldsymbol{\rho}^k, \mathbf{a}^k) \succeq \mathbf{O} \\ \quad \quad \quad (l = 1, \dots, n^c). \end{array} \right\} \quad (21)$$

次のアルゴリズムは、問題 (20) の解を求める逐次 SDP 法である。

Fig. 2: 2-bar truss.

Fig. 3: Set T of uncertain external forces ($n^d = 2$).

アルゴリズム 5.1 (問題(20) に対する逐次 SDP 法).

Step 0: (18) および $\hat{\alpha}(\mathbf{a}^0, \mathbf{u}^c) > 0$ を満たす $\mathbf{a}^0 \geq \mathbf{0}$ を選ぶ。また、 $c^0 > 0$, $c_{\max} \geq c_{\min} > 0$, $\epsilon > 0$ を選び、 $k := 0$ とする。

Step 1: $\mathbf{a} = \mathbf{a}^k$ に対し、SDP 問題(15) の最適解 $(t^k, \boldsymbol{\rho}^k)$ を求める。

Step 2: SDP 問題 (21) の最適解 $(\Delta t^k, \Delta \boldsymbol{\rho}^k, \Delta \mathbf{a}^k)$ を求める。 $\|(\Delta t^k, \Delta \boldsymbol{\rho}^k, \Delta \mathbf{a}^k)\| \leq \epsilon$ ならば、反復終了。

Step 3: $\mathbf{a}^{k+1} := \mathbf{a}^k + \Delta \mathbf{a}^k$ とおく。

Step 4: $c^{k+1} \in [c_{\min}, c_{\max}]$ を選び、 $k \leftarrow k + 1$ として Step 1 へ。

アルゴリズム 5.1 は、本質的に、信頼領域法を取り入れた逐次 SDP 法 [15] に基づいている。以下では、適当な仮定の下でアルゴリズム 5.1 の大域的収束性を示す。以下の 2 つの命題は、アルゴリズム 5.1 の Step 1 および Step 2 で解く SDP 問題が実行可能であることを保証している。

命題 5.2. $\mathbf{a} \geq \mathbf{0}$ を満たす任意の $\mathbf{a} \in \mathbf{R}^{n^m}$ に対し、 $(t, \boldsymbol{\rho}) = \mathbf{0}$ は問題 (15) の実行可能解である。

命題 5.3. $\mathbf{a}^k \geq \mathbf{0}$ および(18) を満たす $\mathbf{a} = \mathbf{a}^k$ に対し、 $(t^k, \boldsymbol{\rho}^k)$ が問題 (15) の実行可能解であるならば、問題 (21) の最適解は一意的に存在する。

また、アルゴリズム 5.1 の大域的収束性に関して、以下の定理を導くことができる [16]。

定理 5.4. 問題 (21) の狭義実行可能性および $\tilde{\mathbf{f}} \neq \mathbf{0}$ を仮定する。また、 $\{(t^k, \boldsymbol{\rho}^k, \mathbf{a}^k)\}$ をアルゴリズム 5.1 で生成される点列とする。このとき、点列 $\{(t^k, \boldsymbol{\rho}^k, \mathbf{a}^k)\}$ のすべての集積点は問題 (20) の停留点である。

6. 例題

種々のトラスに対し、アルゴリズム 5.1 を用いてロバストネス関数を最大化する設計解を求める。アルゴリズム 5.1 の Step 1 および Step 2 では、主双対内点法の実装である SeDuMi Ver. 1.05 [13] を用いて SDP 問題を解く。不確定外力は(5) で定義されるため、以下の例題では、トラスの全ての節点に任意の方向の外力が作用し得る。

6.1. 2 部材トラス

Fig. 2 に示す 2 部材トラスを考える。無応力状態における部材 (1) および (2) の長さは、それぞれ 100 cm および

Fig. 4: Stress states of the 2-bar truss with the initial design $\mathbf{a} = \mathbf{a}^0$ for randomly generated ζ satisfying (5) with $\alpha = \hat{\alpha}(\mathbf{a}^0, \sigma^c)$.

Fig. 5: Stress states of the 2-bar truss with the optimal design $\mathbf{a} = \mathbf{a}^*$ for randomly generated ζ satisfying (5) with $\alpha = \hat{\alpha}(\mathbf{a}^*, \sigma^c)$.

100 $\sqrt{2}$ cmである。節点 (b), (c) はピン支持されており, $n^d = 2, n^m = 2$ である。外力の公称値を $\tilde{\mathbf{f}} = (98.0, 0)$ N で与える。このとき, (5) で定義される不確定外力 $\mathbf{f}$ の集合 $\mathcal{I}$ は, Fig. 3 に図示する円の境界および内部となる。さらに $\sigma_i^c = 9.8 \times 10^4$ Pa において, 各部材の応力制約(3)を考慮する。

アルゴリズム 5.1 の初期解を $\mathbf{a}^0 = (20.0, 40.0)$ cm² と選ぶ。このとき, 命題 4.1 に基づき, 主双対内点法を用いて問題(15)を解くことで $\hat{\alpha}(\mathbf{a}^0, \sigma^c) = 69.297$ N が得られる。次に, アルゴリズム 5.1 を用いてロバストネス関数最大化問題(20)を解く。アルゴリズム 5.1 において, $c^k = 10^{-5}$, $\epsilon = 0.05$ と選び, 部材の総体積の上限値を $\bar{V} = 76.5685$ cm³ とおく, ただし, $\mathbf{a} = \mathbf{a}^0$ において体積制約(18)がアクティブである。得られた最適設計解は $\mathbf{a}^* = (32.1895, 31.3807)$ cm² であり, このときにロバストネス関数は $\hat{\alpha}(\mathbf{a}^*, \sigma^c) = 153.766$ N である。

結果を検証するため, 条件を満たす ζ をランダムに生成して対応する応力 σ_i を求める。Fig. 4 は, 初期解 $\mathbf{a}^0$ においてランダムに作られた $\hat{\alpha}(\mathbf{a}^0, \sigma^c) \geq \|\zeta\|$ を満たす ζ に対応する $(\sigma_1/\sigma_1^c, \sigma_2/\sigma_2^c)$ を示したものである。Fig. 4 に示される全ての場合において, 応力制約(3)が満たされ

Fig. 6: 29-bar truss.

Fig. 7: Optimal design of the 29-bar truss.

ていることが分かる。また, 最悪事例は部材 (1) の制約条件 $\sigma_1 \leq \sigma_1^c$ がアクティブになる場合である。一方, Fig. 5 は, 最適解 $\mathbf{a}^*$ において, $\hat{\alpha}(\mathbf{a}^*, \sigma^c) \geq \|\zeta\|$ を満たすようにランダムに作られた ζ に対応する (σ_1, σ_2) を示している。Fig. 5 より, 応力制約(3)が常に満たされることが分かる。また, 最悪事例では $\sigma_1 \leq \sigma_1^c, \sigma_2 \leq \sigma_2^c, \sigma_2 \geq -\sigma_2^c$ がアクティブになり得る。即ち, 最適化の結果, 部材 (1), (2) 双方の制約条件がアクティブになり得る設計解が得られたことが分かる。

6.2. 29 部材トラス

Fig. 6 に示す 29 部材トラスを考える。節点 (a), (b) はピン支持されており, $n^d = 20, n^m = 29$ である。また, x 軸および y 軸方向の部材の自然長は 50.0 cm である。外力の公称値 $\tilde{\mathbf{f}}$ として, 節点 (c), (d) に $(0, -9.8)$ N を作用させる。外力の集合は(5)で定義されるため, 全ての節点に任意の方向の不確定外力が作用し得る。さらに $\sigma_i^c = 4.9 \times 10^5$ Pa とおき, すべての部材に対して応力制約(3)を考慮する。

初期解を $\mathbf{a}_i^0 = 20.0$ cm² ($i = 1, \dots, n^m$) で与え, 命題 4.1 を用いて $\hat{\alpha}(\mathbf{a}^0, \sigma^c) = 7.1161 \times 10^{-1}$ N を得る。また, $\bar{V} = 3.3971 \times 10^4$, $\epsilon = 0.1, c^k = 10^{-5}$ と選ぶ。

アルゴリズム 5.1 を用いて得られた最適解 $\mathbf{a}^*$ を Fig. 7 に示す。ここで, 各部材の幅は断面積に比例する。このときのロバストネス関数は $\hat{\alpha}(\mathbf{a}^*, \sigma^c) = 10.8496$ N である。結果を検証するため, $\mathbf{a} = \mathbf{a}^0$ および $\mathbf{a} = \mathbf{a}^*$ において, それぞれ, $\hat{\alpha}(\mathbf{a}^0, \sigma^c) \geq \|\zeta\|$ および $\hat{\alpha}(\mathbf{a}^*, \sigma^c) \geq \|\zeta\|$ を満たす ζ をランダムに生成し, 得られた σ_i/σ_i^c を Fig. 8

Fig. 8: Member stresses of the 29-bar truss with the initial design $\mathbf{a} = \mathbf{a}^0$ for randomly generated ζ satisfying (5) with $\alpha = \hat{\alpha}(\mathbf{a}^0, \sigma^c)$.

Fig. 9: Member stresses of the 29-bar truss with the optimal design $\mathbf{a} = \mathbf{a}^*$ for randomly generated ζ satisfying (5) with $\alpha = \hat{\alpha}(\mathbf{a}^*, \sigma^c)$.

および Fig. 9 に示す。Fig. 8 より、 $\mathbf{a} = \mathbf{a}^0$ における最悪事例は、制約 $\sigma_9 \leq \sigma_9^c$ または $\sigma_{15} \geq -\sigma_{15}^c$ がアクティブになる場合であることが分かる。一方、Fig. 9 に示すように、 $\mathbf{a} = \mathbf{a}^*$ ではほとんど全ての部材の応力制約がアクティブになり得る。一般には、ランダムに生成した ζ が正確な最悪事例に一致することはまれである。このため、Fig. 9 において、部材 (1), (2), (12), (13), (14) などの断面積が比較的小さい部材に対する応力制約がアクティブとなる ζ は得られていない。

7. 結論

本稿では、ロバストネス関数 [11] に基づくトラスのロバスト最適設計法を定式化し、その最適解を効率良く得る手法を提案した。

外力が不確定性を有する場合に、応力制約に関するトラスのロバストネス関数を数理計画問題の最適値として定式化した。また、この問題が半正定値計画問題に帰着できることを示した。

次に、トラスのロバスト最適設計問題として、体積制約の下でロバストネス関数を最大化する問題を定式化した。半正定値計画法を繰り返し解くことにより最適設計解を得るアルゴリズムを提案し、その大域的収束性を示した。ま

た、種々の数値例題を通じ、提案手法の有効性を例証した。

参考文献

- [1] Kharmanda, G., Olhoff, N., Mohamed, A. and Lemaire, M., Reliability-based topology optimization, *Struct. Multidisc. Optim.*, **26** (2004) 295–307.
- [2] Choi, K.K., Tu, J. and Park, Y.H., Extensions of design potential concept for reliability-based design optimization to nonsmooth and extreme cases, *Struct. Multidisc. Optim.*, **22** (2001) 335–350.
- [3] Doltsinis, I. and Kang, Z., Robust design of structures using optimization methods, *Comput. Meth. Appl. Mech. Engrg.*, **193** (2004) 2221–2237.
- [4] Pantelides, C.P. and Ganzerli, S., Design of trusses under uncertain loads using convex models, *J. Struct. Engrg. (ASCE)*, **124** (1998) 318–329.
- [5] Ben-Tal, A. and Nemirovski, A., Robust truss topology optimization via semidefinite programming, *SIAM J. Optim.*, **7** (1997) 991–1016.
- [6] Han, J.S. and Kwak, B.M., Robust optimization using a gradient index: MEMS applications, *Struct. Multidisc. Optim.*, **27** (2004) 469–478.
- [7] 曾我部博之, 非線形感度によるロバスト性を考慮した平面骨組の最適塑性設計, 日本建築学会構造系論文集, **556** (2002) 63–69.
- [8] Ben-Haim, Y. and Elishakoff, I., *Convex Models of Uncertainty in Applied Mechanics*, Elsevier, New York, 1990.
- [9] Ben-Tal, A. and Nemirovski, A., *Lectures on Modern Convex Optimization: Analysis, Algorithms, and Engineering Applications*, SIAM, Philadelphia, Pennsylvania, 2001.
- [10] Wolkowicz, H., Saigal, R. and Vandenberghe, L. (eds.), *Handbook of Semidefinite Programming — Theory, Algorithms, and Applications*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, Netherlands, 2000.
- [11] Ben-Haim, Y., *Information-gap Decision Theory*, Academic Press, London, UK, 2001.
- [12] 竹脇出, 不確定性を有する構造物のロバスト性の非確率的評価法, 日本建築学会構造系論文集, **581** (2004) 55–61.
- [13] Sturm, J.F., Using SeDuMi 1.02, a MATLAB toolbox for optimization over symmetric cones, *Optim. Meth. Software*, **11/12** (1999) 625–653.
- [14] Kanno, Y., Ohsaki, M. and Katoh, N., Sequential semidefinite programming for optimization of framed structures under multimodal buckling constraints, *International Journal of Structural Stability and Dynamics*, **1** (2001) 585–602.
- [15] Kanzow, C., Nagel, C. and Fukushima, M., Successive linearization methods for nonlinear semidefinite programs, *Technical Report 2003-011*, Department of Applied Mathematics and Physics, Kyoto University, August 2003.
- [16] Kanno, Y. and Takewaki, I., Sequential semidefinite program for robust truss optimization based on robustness functions associated with stress constraints, *BGE Research Report 04-05*, Building Geoenvironment Engineering Laboratory, Kyoto University, Japan, July 2004.