可変状態遷移確率を持つ切換え型 ARX モデルの提案

Development of Switched ARX Model with Variable State Transition Probability

○学 奥田 裕之, 正 稲垣 伸吉, 正 鈴木 達也 (名古屋大)

Hiroyuki OKUDA, Shinkichi INAGAKI, Tatsuya SUZUKI (Nagoya Univ.)

This paper presents a new hybrid system model which is extended from the Hidden Markov Model (HMM) by specifying the state transition probability and the symbol output probability using a likelihood of Logistic Regression Model and the ARX model, respectively. By this extension, more complex behavior can be expressed with smaller number of states compared with the HMM. The parameter estimation algorithm for the proposed model is derived based on the EM algorithm with the weighted likelihood function. Then, the proposed algorithm is applied to identify some complex behavior, and the usefulness is confirmed.

Key Words : Hybrid System, Hidden Markov Model, Logistic Regression Model

1. は じ め に

微分(差分)方程式と論理が混在したシステムはハイブリッドシステムと呼ばれ,ここ数年システム制御や計算機科学の分野で多くの注目を集めている。中でもハイブリッドシステムのパラメータ推定問題は人間のスキル解析^[1]や故障診断,認識,さらにはシステムバイオロジー等,応用範囲も広く,今後様々な分野で用いられることが予想される。

ハイブリッドシステムは大きく分けて,確定的なハイブリッドシステムと確率的なハイブリッドシステムとに分けられ,それぞれにおいて,あるクラスに対していくつかのパラメータ推定法が提案されている。確定的なハイブリッドシステムにおいては,データクラスタリングとサポートベクタマシンに基づく方法^[2]や,論理条件を不等式に変換し,混合整数計画法に帰着する方法^[3]等が提案されている。一方,確率的なハイブリッドシステムにおいては,隠れマルコフモデル(HMM)^[4]の拡張,という形で取り扱われる形が多く,通常はEMアルゴリズムがパラメータ推定の出発点となる^{[4][5]}。これらの手法においては,各離散状態に連続のダイナミクスが割り当てられ,そのダイナミクスを通して出力信号が観測される点が従来のHMMとの大きな相違点となっているが,しかしRabinerら^[4]やBalakrishnanら^[5]の枠組みでは,システムへの入力を陽に考慮していないことから,入出力関係をモデル化するシステム同定,という観点から見た場合,利便性に欠ける。

そこで,HMMの各離散状態にARXモデル(Auto-Regressive eXogenousモデル)を割り当てた確率的なハイブリッドシステム表現であるSS-ARXモデル(Stochastic Switched ARXモデル)が提案された^[6]。しかし各差分方程式のを切り換える条件を推定するためには,サポートベクターマシン等の学習手法を別途適用する必要があった。

そこで本論文では,先のSS-ARXモデルのさらなる発展形として,論理の表現にLogistic回帰モデル^[7]を用いてSS-ARXの状態遷移確率を環境変数に依存した時変の状態遷移確率として拡張することで,差分方程式のパラメータだけでなく,論理をも同時に含めたパラメータ推定を可能とする「可変状態遷移確率を持つ切換え型ARXモデル」を提案する。まず,提案モデルの要素となるARXモデルとHMM,Logistic回帰モデルについて述べ,次に提案モデルの構成について述べる。そして,提案モデルのパラメータを推定するアルゴリズムについて述べる。最後に,仮想的なハイブリッドシステムを対象にパラメータ推定アルゴリズムを適用し,提案手法の有用性を示す。

2. 可変状態遷移確率を持つ切換え型 ARX モデル

本稿では,環境変数に基づいて決定される状態遷移確率を持ち,ARXモデルで表現された入出力関係がその状態遷移確率に従って異なるARXモデルに遷移するようなモデルを提案する。本モデルは状態遷移確率が環境変数に従って変化することから,ここでは可変状態遷移確率を持つ切換え型ARXモデル(以下,提案モデル)と呼ぶことにする。提案モデルの概要を図1に示す。

2.1 モデルパラメータ 提案モデルのパラメータを以下のように定義する。

- S_i : 離散状態 ($i=1,2,\dots,N$)
- π_i : 初期状態確率 ($i=1,2,\dots,N$)
- θ_i : 各離散状態 S_i での ARX モデルのパラメータベクトル ($i=1,2,\dots,N$)
- σ_i^2 : 各離散状態 S_i に割り当てられた ARX モデルの式誤差を表す正規分布の分散 ($i=1,2,\dots,N$)
- $\eta_{i,j}$: 状態 i から j への状態遷移確率を決定するロジスティック回帰モデルのパラメータベクトル ($i=1,2,\dots,N; j=1,2,\dots,N$)

ここで, N は離散状態の数である。提案モデルでは一般のHMMとは異なり,状態遷移確率は時変であり,パラメータベクトル $\eta_{i,j}$ とデータベクトルによって得られる。また,観測シンボルの出力確率も時変となり,パラメータベクトル θ_i とデータベクトルによって得られる。以下の節では,提案モデルの観測シンボルとその出力確率,およびLogistic回帰モデルを用いた状態遷移確率の定義について説明する。以下では,時刻 t におけるシステムへの入力を u_t , システムからの出力を y_t とし,観測可能な入力,

Fig. 1 Proposed model(3 states)

および出力の再帰項から構成されるデータベクトル $\boldsymbol{\psi}_t$ は

$$\boldsymbol{\psi}_t = [y_{t-1}, y_{t-2}, \dots, y_{t-n}, u_t, u_{t-1}, \dots, u_{t-m}, 1]^T \quad (1)$$

とする。ただし、 n, m はそれぞれ ARX モデルにおける過去の出力数と入力数であり、定数項に対応する 1 は必要に応じて付与する。また、 $t-n < 0$ のとき $y_{t-n} = 0$ 、 $t-m < 0$ のとき $u_{t-m} = 0$ とする。本稿では簡単のため、状態 i から状態 $i+1$ のみへと遷移する left-to-right モデルを対象とする。

2.2 観測シンボルとその出力確率の定義 初めに、提案モデルで用いる時刻 t における観測シンボル o_t を定義する。提案モデルでは、各状態には

$$y_t = \boldsymbol{\psi}_t^T \boldsymbol{\theta}_i + e_{i,t} \quad (2)$$

という ARX モデルが割り当てられている。ここで y_t は ARX モデルの出力、 $\boldsymbol{\psi}_t$ は入力および出力の再帰項を含むデータベクトル、 $\boldsymbol{\theta}_i (= [\theta_{i,1}, \theta_{i,2}, \dots, \theta_{i,(n+m+2)}]^T)$ は提案モデルのパラメータである。これらを用いて、時刻 t での観測シンボル o_t を、 $o_t = (y_t, \boldsymbol{\psi}_t)$ と定める。(2) 式の ARX モデルの式誤差は正規分布が仮定されていることから、観測シンボル o_t の出力確率 $b_i(o_t)$ を正規分布に基づいて次のように与える。

$$b_i(o_t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_i} \exp \left\{ -\frac{(\boldsymbol{\psi}_t^T \boldsymbol{\theta}_i - y_t)^2}{2\sigma_i^2} \right\} \quad (3)$$

提案モデルは、このような観測シンボルの出力確率の定義を用いることでデータの入出力関係を陽に考慮することができ、ハイブリッドシステムのモデル化において、通常の量子化に基づく HMM よりも少ない状態数で、かつ精緻なモデル化が可能となる。

2.3 状態遷移確率の定義 次に、提案モデルで用いる時刻 t における状態遷移確率を定義する。状態遷移確率は、状態 i から状態 j へと遷移する、という事象が起きる確率であり、提案モデルでは Logistic 回帰モデルを用いてこの確率を与える。前節のような観測シンボル o_t が観測された場合、その遷移確率を以下のように定義する。

$$Z_{i,j}(o_t) = \boldsymbol{\psi}_t^T \boldsymbol{\eta}_{i,j} \quad (4)$$

$$a_{i,i+1}(o_t) = \frac{\exp \{Z_{i,i+1}(o_t)\}}{1 + \exp \{Z_{i,i+1}(o_t)\}} \quad (5)$$

$$a_{i,i}(o_t) = \frac{1}{1 + \exp \{Z_{i,i+1}(o_t)\}} = 1 - a_{i,i+1}(o_t) \quad (6)$$

ただし、先に述べたように本稿では left-to-right モデルのみを対象とするため、

$$a_{i,j}(o_t) = 0 \quad \text{if } j \neq i \cap j \neq i+1 \quad (7)$$

とし、 $\boldsymbol{\eta}_{i,j} (= [\eta_{i,j,1}, \eta_{i,j,2}, \dots, \eta_{i,j,(n+m+2)}]^T)$ は $j = i+1$ の場合のみ定義されることとする。なお、一般の場合には多項ロジスティック回帰モデルを用いることで本稿と同様の定式化が可能である。

以上の定義に基づき、以下の章では提案モデルのパラメータ推定手法について述べる。

3. パラメータの最尤推定

確率的なハイブリッドシステム表現である提案モデルでは、確率的なばらつきに対応するため、観測された L 本の出力シンボル系列から提案モデル中のパラメータを推定する問題を考える。この問題は、HMM における学習問題に相当する。学習問題とは、 $o_{l,t} \in \mathcal{O}$ は l 本目の試行の時刻 t での出力シンボルとすると、特定の出力シンボル系列 $\mathbf{O}_l = [o_{l,0}, o_{l,1}, \dots, o_{l,T}]$ (ただし $l = 1, 2, \dots, L$) が与えられたとき、与えられた出力シンボル系列を出力する確率が最も高くなるようにモデルパラメータを推定する問題である。提案モデルにおいても、HMM と同様に EM アルゴリズムを用いてパラメータを推定する。

3.1 EM アルゴリズム 今、提案モデル中のパラメータを λ とし、観測できない状態系列を $\mathbf{s}_l = [s_{l,0}, s_{l,1}, \dots, s_{l,T}]$ 、そのとき観測される出力シンボル系列を $\mathbf{O}_l = [o_{l,0}, o_{l,1}, \dots, o_{l,t}, \dots, o_{l,T}]$ としたとき、 $\mathbf{O}_0, \mathbf{O}_1, \dots, \mathbf{O}_L$ がそれぞれ出力する尤度の和 $\sum_{l=1}^L L(\mathbf{s}_l, \mathbf{O}_l; \lambda) = \sum_{l=1}^L P(\mathbf{s}_l, \mathbf{O}_l | \lambda)$ を、最大化する λ (最尤推定量) を求めることを考える。

この問題は解析的に解くことはできないため、EM アルゴリズムを用いる。EM アルゴリズムでは、 $\sum_{l=1}^L P(\mathbf{s}_l, \mathbf{O}_l | \lambda)$ を最大化するかわりに、観測できない状態についての期待値である

$$Q(\lambda, \lambda') = \sum_{l=1}^L E[\log \{P(\mathbf{s}_l, \mathbf{O}_l | \lambda')\} | \mathbf{O}_l, \lambda] \\ = \sum_{l=1}^L \sum_{\mathbf{s}_l} P(\mathbf{s}_l | \mathbf{O}_l, \lambda) \log \{P(\mathbf{s}_l, \mathbf{O}_l | \lambda')\} \quad (8)$$

で定義される Q 関数 (尤度関数) を最大化する λ' を以下の繰り返しにより逐次的に求める方法である。

1. 適当な初期パラメータ λ を定める。
2. $Q(\lambda, \lambda')$ を最大化する λ' を求める。
3. $\lambda \cong \lambda'$ として収束するまで 2. を繰り返す。

3.2 パラメータ推定式の導出 まず、提案モデルの Q 関数を求める。更新前のモデルパラメータ (既知) を $\lambda = (\pi_i, \boldsymbol{\eta}_{i,j}, \boldsymbol{\theta}_i, \sigma_i)$ 、更新後のモデルパラメータ (未知) を $\lambda' = (\pi'_i, \boldsymbol{\eta}'_{i,j}, \boldsymbol{\theta}'_i, \sigma'_i)$ とする。(8) 式より、

$$Q(\lambda, \lambda') = \sum_{l=1}^L \left\{ \sum_{\mathbf{s}_l} \frac{1}{P(\mathbf{O}_l | \lambda)} P(\mathbf{s}_l, \mathbf{O}_l | \lambda) \right. \\ \left. \times \log \{P(\mathbf{s}_l, \mathbf{O}_l | \lambda')\} \right\} \quad (9)$$

$$= \sum_{l=1}^L \sum_{\mathbf{s}_l} k_l P(\mathbf{s}_l, \mathbf{O}_l | \lambda) \log \{P(\mathbf{s}_l, \mathbf{O}_l | \lambda')\} \quad (10)$$

と表される。ここで、 $k_l = 1/P(\mathbf{O}_l | \lambda)$ と置いた。パラメータが λ の時、状態系列が $\mathbf{s}_l$ 、出力シンボル系列が $\mathbf{O}_l$ となる確率 $P(\mathbf{s}_l, \mathbf{O}_l | \lambda)$ は、

$$P(\mathbf{s}_l, \mathbf{O}_l | \lambda) = \pi_{s_0} b_{s_0}(o_{l,0}) \times a_{s_0 s_1}(o_{l,1}) b_{s_1}(o_{l,1}) \\ \times a_{s_1 s_2}(o_{l,2}) b_{s_2}(o_{l,2}) \times \dots \\ \times a_{s_{T-1} s_T}(o_{l,T}) b_{s_T}(o_{l,T}) \quad (11)$$

となる。

ここで、前向き確率 $\alpha(l, i, t)$ と、後ろ向き確率 $\beta(l, i, t)$ を導入する。前向き確率 $\alpha(l, i, t)$ とは、パラメータが λ である提案モデルが、時刻 t までに出力シンボル系列 $\mathbf{O}_l = [o_{l,0}, o_{l,1}, \dots, o_{l,t}]$ を出力して、状態 S_i に達する ($s_t = S_i$ となる) 確率である。また、後ろ向き確率 $\beta(l, i, t)$ とは、パラメータが λ である提案モデルが、時刻 t で状態 S_i から ($s_t = S_i$ から)、出力記号系列 $\mathbf{O}_l = [o_{l,t+1}, o_{l,t+2}, \dots, o_{l,T}]$ を出力して、最終状態に達する確率である。これらは HMM と同様に定義される。

ここで、(11) 式を (9) 式へ代入し、整理すると、

$$Q(\lambda, \lambda') = Q_1(\lambda, \lambda') + Q_2(\lambda, \lambda') + Q_3(\lambda, \lambda') \quad (12)$$

と変形できる。ただし、

$$Q_1(\lambda, \lambda') = \sum_{l=1}^L \sum_{i=0}^N \pi_i \pi'_i b_i(o_{l,0}) \log \{\pi'_i\} \beta(l, i, 0) \quad (13)$$

$$Q_2(\lambda, \lambda') = \sum_{l=1}^L \sum_{t=1}^T \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N k_l \log \{a'_{i,j}(o_{l,t})\} \\ \times \alpha(l, i, t-1) a_{i,j}(o_{l,t}) b_j(o_{l,t}) \beta(l, j, t) \quad (14)$$

$$Q_3(\lambda, \lambda') = \sum_{l=1}^L \sum_{t=0}^{T-1} \sum_{i=1}^N k_l \log \{b'_i(o_{l,t})\} \alpha(l, i, t) \beta(l, i, t) \quad (15)$$

である。ここで、 $Q_1(\lambda, \lambda')$, $Q_2(\lambda, \lambda')$, $Q_3(\lambda, \lambda')$ はそれぞれ更新後のモデルパラメータにおける初期状態確率 π'_i , 状態遷移確率 $a'_{i,j}(o_{l,t})$, シンボル出力確率 $b'_i(o_{l,t})$ についての項である。

従って $Q(\lambda, \lambda')$ を最大化する λ' を求めるためには、(13)(14)(15) 式の $Q_1(\lambda, \lambda')$, $Q_2(\lambda, \lambda')$, $Q_3(\lambda, \lambda')$ をそれぞれ最大化する λ' を求めればよい。このような更新後のパラメータ π'_i , θ'_i , σ'_i については、それぞれ以下のように求まる。

$$\pi'_i = \frac{\sum_{l=1}^L k_l \pi_i b_i(o_{l,0}) \beta(l, i, 0)}{\sum_{i=1}^N \sum_{l=1}^L k_l \pi_i b_i(o_{l,0}) \beta(l, i, 0)}, \quad (16)$$

$$\theta'_i = \left\{ \sum_{t=0}^T \sum_{l=1}^L \left\{ k_l \boldsymbol{\psi}_{l,t} \boldsymbol{\psi}_{l,t}^T \alpha(l, i, t) \beta(l, i, t) \right\} \right\}^{-1} \times \left\{ \sum_{t=0}^T \sum_{l=1}^L \left\{ k_l \boldsymbol{\psi}_{l,t} y_{l,t} \alpha(l, i, t) \beta(l, i, t) \right\} \right\} \quad (17)$$

$$\sigma_i'^2 = \frac{\sum_{t=0}^T \sum_{l=1}^L \left\{ |\boldsymbol{\psi}_{l,t}^T \theta'_i - y_{l,t}|^2 k_l \alpha(l, i, t) \beta(l, i, t) \right\}}{\sum_{t=0}^T \sum_{l=1}^L \left\{ k_l \alpha(l, i, t) \beta(l, i, t) \right\}} \quad (18)$$

ただし、 $Q_2(\lambda, \lambda')$ はパラメータ $\boldsymbol{\eta}'_{i,j}$ について非線形であり、解析解は求まらない。そこで $Q_2(\lambda, \lambda')$ のパラメータ $\boldsymbol{\eta}'_{i,j}$ に関する偏微分

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q_2(\lambda, \boldsymbol{\eta}'_{i,j})}{\partial \boldsymbol{\eta}'_{i,j}} &= \sum_{l=1}^L k_l \sum_{t=1}^T \alpha(l, i, t-1) a_{i,j}(o_{l,t-1}) b_j(o_{l,t}) \\ &\quad \times \beta(l, j, t) \boldsymbol{\psi}_{l,t} \{1 - a'_{i,j}(o_{l,t})\} \\ &\quad - \sum_{l=1}^L k_l \sum_{t=1}^T \alpha(l, i, t-1) a_{i,i}(o_{l,t-1}) b_i(o_{l,t}) \\ &\quad \times \beta(l, i, t) \boldsymbol{\psi}_{l,t} \{a'_{i,j}(o_{l,t})\} \end{aligned} \quad (19)$$

を用い、最急降下法を用いることで逐次的にパラメータの局所最大化を行う。

ただし、EM アルゴリズムにより求まる解は局所最適解であるため、複数の初期値から極大化を試みる必要があることに注意されたい。

3.3 重み付き尤度の導入 3.2 節では、2.3 節で述べた状態遷移確率に基づく尤度関数を、EM アルゴリズムを用いて局所最大化する手法を述べた。しかし提案モデルを用いた場合、状態が次の状態へと遷移する確率 ($a_{i,i+1}$) が高くなるデータ点の数に対し、状態が滞在する確率 ($a_{i,i}$) が高くなるデータ点の数が非常に多くなる。すると、状態が滞在する確率 ($a_{i,i}$) が高くなるほうが尤度が高くなってしまふ。 $\boldsymbol{\eta}$ を論理条件として学習するためには、このデータ数のアンバランスを解決する必要がある。そこで、尤度関数内の $P(s_l, \mathbf{O}_l | \lambda)$ に変わり、以下の重み付き尤度を用いる。

$$\begin{aligned} \hat{P}(s_l, \mathbf{O}_l | \lambda) &= \pi_{s_0} b_{s_0}(o_{l,0}) \times \hat{a}_{s_0 s_1}(o_{l,1}) b_{s_1}(o_{l,1}) \\ &\quad \times \hat{a}_{s_1 s_2}(o_{l,2}) b_{s_2}(o_{l,2}) \times \cdots \\ &\quad \times \hat{a}_{s_{T-1} s_T}(o_{l,T}) b_{s_T}(o_{l,T}) \end{aligned} \quad (20)$$

ただし、 $\hat{a}_{i,j}$ は $i = s_{t-1}$ とすると以下で定義される。

$$Z_{i,i+1}(o_t) = \boldsymbol{\psi}_t^T \boldsymbol{\eta}_{i,i+1} \quad (21)$$

$$\hat{a}_{i,i+1}(o_t) = a_{i,i+1}(o_t) \quad \hat{a}_{i,i}(o_t) = w \times a_{i,i}(o_t) \quad (22)$$

ここで、 w は状態が遷移しない場合にかかる重みであり、 $w < 1$ となる値を設定することで状態遷移が起きる確率を重視した尤度となる。

4. ハイブリッドシステムのパラメータ推定例

本章では、ハイブリッドシステムの一つである区分的アフィンモデルを同定対象として、提案モデルのパラメータ推定を適用する。また、提案モデル用に拡張された Viterbi アルゴリズムを用いて状態の切換え時刻と出力の推定を行う例を示す。

Table 1 Parameters of identification target($\boldsymbol{\theta}^*$)

$\boldsymbol{\theta}^*$	$\theta_{i,1}^*$	$\theta_{i,2}^*$	$\theta_{i,3}^*$
$\boldsymbol{\theta}_1^*$	0.50	0.50	0.10
$\boldsymbol{\theta}_2^*$	-0.50	0.70	-0.30
$\boldsymbol{\theta}_3^*$	0.50	-0.50	-0.30

Table 2 Parameters of identification target($\boldsymbol{\eta}^*$)

$\boldsymbol{\eta}^*$	$\eta_{i,1}^*$	$\eta_{i,2}^*$	$\eta_{i,3}^*$
$\boldsymbol{\eta}_1^*$	15.0	1.50	-4.50
$\boldsymbol{\eta}_2^*$	7.50	-3.50	-5.00

Fig. 2 Input(x_1, x_2) and output(y) of identification target($l = 1$)

4.1 同定対象システム 同定対象は、次式のような、3 モードの区分的アフィンシステムを考える。

$$y_t^* = \boldsymbol{\psi}_t^T \boldsymbol{\theta}_{s_t}^* + e_t \quad (23)$$

ここで、 y_t^* はシステムの出力、 $\boldsymbol{\psi}_t$ は入力からなるデータベクトル、 $s_t^* (\in \{1, 2, \dots, N\}, t = 1, 2, \dots, T)$ は時刻 t におけるモード、 $\boldsymbol{\theta}_{s_t}^*$ はモード s_t^* におけるアフィンモデルのパラメータであり、 e_t は出力に加わる雑音である。 s_t^* は以下のように決定される。

$$s_t^* = \begin{cases} 1 & (\boldsymbol{\psi}_{l,t}^T \boldsymbol{\eta}_{1,2} + f_l < 0) \\ 2 & (\boldsymbol{\psi}_{l,t}^T \boldsymbol{\eta}_{1,2} + f_l \geq 0 \cap \boldsymbol{\psi}_{l,t}^T \boldsymbol{\eta}_{2,3} < 0) \\ 3 & (\boldsymbol{\psi}_{l,t}^T \boldsymbol{\eta}_{1,2} + f_l \geq 0 \cap \boldsymbol{\psi}_{l,t}^T \boldsymbol{\eta}_{2,3} \geq 0) \end{cases} \quad (24)$$

すなわち、線形判別式 $\boldsymbol{\psi}^T \boldsymbol{\eta}_{1,2} = 0, \boldsymbol{\psi}^T \boldsymbol{\eta}_{2,3} = 0$ となる時、モードが切り換るとした。なお、 f_l はシステムの状態遷移に関するばらつきに関する雑音である。

本稿では、上記のモデルの各パラメータとして表 1 と決める。また、 e_t と f_l は、それぞれ平均 0、標準偏差 0.03 の正規分布に従う白色雑音とした。

4.2 同定対象システムへの入力 システムへの入力には、以下のデータベクトルを用いた。

$$x_1(l, t) = \frac{t}{T}, \quad x_2(l, t) = \sin^{p_l} \left(\pi \frac{t}{T} \right) \quad (25)$$

$$\boldsymbol{\psi}_{l,t} = [x_1(l, t) \quad x_2(l, t) \quad 1] \quad (26)$$

ここで $t = 1, 2, \dots, T$ であり、 $T = 200, p_l$ は平均 0、標準偏差 1.6 の正規乱数とし、 $l = 1, 2, \dots, 10$ の計 10 本の入力データを作成した。この時得られた入出力の例を図 2 に示す。また、モード切換えの条件となるロジスティック回帰モデルから得られる状態遷移確率が 0.5 となる点、すなわちロジット値 $Z^*(\boldsymbol{\psi}) = 0$ となる線を図 3 に示した。図中の実線はモード 1 からモード 2 への遷移条件、破線はモード 2 からモード 3 への遷移条件を表わす。

4.3 学習データを用いたパラメータ推定 以上のようなデータを学習データとし、ここでは可変状態遷移確率を持つ切換え型 ARX モデルを用いたパラメータ推定を試みる(ただし、本稿では ARX モデルではなくアフィンモデルとする)。モデルの

Fig. 3 Switching conditions and the profiles of x_1 and x_2

Table 3 Estimated parameters(θ)

θ	$\theta_{i,1}$	$\theta_{i,2}$	$\theta_{i,3}$
θ_1	0.35	0.51	0.09
θ_2	-0.55	0.67	-0.24
θ_3	0.45	-0.52	-0.25

Table 4 Estimated parameters(η)

η	$\eta_{i,i+1,1}$	$\eta_{i,i+1,2}$	$\eta_{i,i+1,3}$
$\eta_{1,2}$	51.23	12.61	-23.18
$\eta_{2,3}$	50.70	-42.98	-25.47

Fig. 4 Estimated switching conditions

状態数は left-to-right 型構造の 3 状態とし、各モデルパラメータの構造は対象システムと同一とする。重み付き尤度関数の重み w は $w = \sqrt{N/T}$ とした。また、EM アルゴリズムで得られる解は局所最適解であることから、 -20 から 20 までの一様乱数により各パラメータの初期値をそれぞれ生成し、初期値を 10000 回変えながら解の探索を行った。

以上の条件で、3 章で述べたパラメータ推定手法に基づいて学習データに適合するパラメータを推定した結果、表 3、表 4 が得られた。各状態のアフィンモデルのパラメータ θ に関しては $\theta_{1,1}$ には若干の差異が認められるものの、その他では対象システムとして設定されたパラメータに近い解が得られている。一方で、状態遷移確率を決定するロジスティック回帰モデルのパラメータ η については、値そのものを直接比較することはできない。そこで、図 4 にはロジット値 $Z_{1,2}(\psi) = 0$ および $Z_{2,3}(\psi) = 0$ (すなわち状態遷移確率 $a_{1,2}(\psi) = 0.5$ 、 $a_{2,3}(\psi) = 0.5$) となる線をそれぞれ実線と破線で記した。学習の結果、それぞれは学習データのモードが変わる点付近に収束していることがわかり、論理条件がモデル化できていることがわかる。

次に、Viterbi アルゴリズムを用いた状態系列の推定と、提案モデルによる出力の推定を行う。提案モデルにおいても、一般の HMM と同様に、特定のモデルパラメータ $\lambda = (\pi_i, \eta_{i,j}, \theta_i, \sigma_i)$ と特定の出力シンボル系列 $O = [o_0, o_1, \dots, o_t, \dots, o_T]$ が与えられたとき、モデルから出力シンボル系列が生成される一番尤もらしい状態系列 $s = [s_0, s_1, \dots, s_t, \dots, s_T]$ を推定する問題である。 $l = 1$

Fig. 5 Estimated model output and state sequence($l = 1$)

の学習データに対する状態系列の最尤推定結果を図 5 に示す。また同図には、推定された各時刻の状態に割り当てられた ARX モデルを用いた出力 y^* の推定値 y を示している。これを見ると、状態系列と出力の推定が正しくできている様子が確認できる。

以上のことから提案モデルは、ハイブリッドシステムに対して、各状態における差分方程式、およびその切換え条件の双方のパラメータを推定できることがわかった。

5. お わ り に

本論文では、HMM を拡張した、新しいハイブリッドシステムモデルである可変状態遷移確率を持つ切換え型 ARX モデルを提案した。本モデルでは、状態遷移確率がロジスティック回帰モデルに基づいて、観測シンボルの出力確率が ARX モデルの式誤差に基づいて定義された。また、HMM におけるパラメータ推定法である EM アルゴリズムをベースとして、本モデルにおける重み付きの尤度関数を用いてそのパラメータ推定法を導いた。最後に、区分的アフィンシステムを対象に、提案モデルを用いたパラメータ推定を行い、その有用性が確認された。

今後の課題として、本モデルでは EM アルゴリズムを用いて解を探索する際の初期値の依存性が強いので、データクラスタリングを用いるなど、適切な初期パラメータを設定する方法が必要である。また、尤度関数に用いる重みの設定手法についても検討が必要である。

文 献

- [1] J.H.Kim, S.Hayakawa, T.Suzuki et.al; Modeling of Human Driving Behavior based on Expression as Hybrid Dynamical System, Trans.of SICE, Vol.40, No.2, pp.180-188, 2004
- [2] G.Ferrari-Trecate, M.Morari et.al; A clustering technique for the identification of piecewise affine systems, Automatica, 39, pp.205-217, 2003
- [3] J.Roll, A.Bemporad, et.al; Identification of piecewise affine systems via mixed-integer programming, Automatica, 40, pp.37-50, 2004
- [4] Lawrence R. Rabiner; A Tutorial on Hidden Markov Models and Selected Applications in Speech Recognition, IEEE, Vol.77, 1989
- [5] H.Balakrishnan et.al; Inference Methods for Autonomous Stochastic Linear Hybrid Systems " LNCS2993, HSCC 2004, pp.64-79, 2004
- [6] S. Sekizawa, S. Inagaki, T. Suzuki, S. Hayakawa, N. Tsuchida, T. Tsuda, H. Fujinami, "Modeling and Recognition of Driving Behavior Based on Stochastic Switched ARX Model", IEEE Trans. on Intelligent Transportation Systems, Vol. 8, No. 4, 2007
- [7] David W., Jr Hosmer, Stanley Lemeshow; Applied Logistic Regression(Wiley Series in Probability and Statistics- Applied Probability and Statistics Section), John Wiley & Sons Inc, 2001