異なる質量粒子を含む実時間 SPH 流体シミュレーションの安定性考察

A study on a stability of a real time SPH fluid simulation including particles with different mass

正 川井 昌之 (福井大) 〇学 小松 雅弥 (福井大) 松井 一成 (福井大)
Masayuki KAWAI, Masaya KOMATSU, and Kazunari MATSUI, University of Fukui

A real-time SPH fluid simulator is useful for constructing a virtual environment containing fluid with a free surface. In order to develop a more efficient simulator, it is better to control the mass of each particles, in which particles near the surface has light weight and make high density; and particles near the bottom is heavy and low density. In this research, we study the stability of such simulations including particles with different mass and the characteristics of a feedback gain. Then, we propose a more stable feedback method considering mass change rate. Finally, we perform a simulation to show the effect of the proposed method.

Key Words: SPH, real-time fluid simulation, density feedback

1. 緒言

バーチャルリアリティ (VR: Virtual Reality) において, 仮想環境に流体を組みこむことにより, 更に広い分野への応用が期待できる. 流体の挙動計算手法の中でも, Smoothed Particles Hydrodynamics (SPH) 法[1]は自由表面があるような流体现象などを比較的簡単に短時間で計算でき, 現在では様々な流体シミュレーションに用いられている. 筆者らも, 今まで SPH 法を使用し, 実時間計算可能な流体シミュレータを構築してきた[2]. VR における粒子法を用いた流体シミュレーションでは, 粒子の存在する位置により, 重視される要素が異なってくる. 視覚的な影響を与えやすい流体表面は, より細かい描写が望まれ, 粒子質量を軽くし, 粒子密度の高いシミュレーションを行いたい, 流体全体を高密度の粒子とすると, 粒子数の増大から計算負荷が高くなる. その一方で, 流体の深部では, 細かい描写の必要がなく, 粒子質量を重くし, 粗い密度のシミュレーションを行ったとしても, VR においては, 人に与える影響は少ないと考えられる. すなわち, 流体表面など細かい挙動の計算が必要な部分では小さい粒子質量とし, 水中深部では大きい粒子質量のシミュレーションを行うことで, 人に与える表現力の向上と計算負荷の軽減の両立できる可能性がある.

そこで本研究では, 流体表面は粒子質量を小さくし, 細かい描写が必要のない水中深部では質量を大きくするような異なる粒子質量を持つ流体シミュレータの構築を目指す. まず, この場合の粒子挙動を観測するとともに, より安定にシミュレーションを行うため, 粒子の質量変化率を考慮した SPH 法での圧力フィードバックの修正を行い, その効果を検証する.

2. 問題設定

本研究では, 仮想容器内の粒子が流体表面では細かく, 流体の深部では粗くなるようなシミュレーションを構築する. この場合, (1) 仮想容器内でどのように粒子質量を設定すべきかという問題と(2)質量が変動する場合に安定な計算手法の問題があるが, 本発表では (2) の問題に焦点を当てるため, Fig.1 に示すような正方形の仮想容器と高さにより 粒子質量の異なる a,b,c の 3 種類の領域を設けるものとする. a 領域は水中深部であり, この領域内の粒子の質量は全て重い質量 m_1 を割り当てる. c 領域は流体表面に近い領域であり一定の軽い質量 m_2 ($m_1 > m_2$) とする. b 領域は a と c 領域を接続する領域であり, 粒子の高さによって質量が線形的に変化するように以下のように質量を設定する.

$$m_3 = \left(1 - \frac{h}{b}\right)m_1 + \frac{h}{b}m_2 \quad (1)$$

と与える. ここで, h は a~b 領域の接触面からの高さである. この環境での粒子の挙動を観測するとともに, より安定な計算手法を考察する.

Fig. 1 Condition in this research

3. SPH の基礎式と既存の研究

SPH 法は流体を Fig.2 のように流体を粒子に分割し, 各粒子点物理量 (速度, 密度等) を計算するものである.

Fig. 2 Particles in SPH

ここで, 第 i 粒子の位置を点 $\mathbf{r}_i = [x_i y_i z_i]^T$ とした場合, 第 i 粒子におけるある物理量 A_i は次のように表わされる.

$$A_i = \sum_j m_j \frac{A_j}{\rho_j} w_{ij} \quad (2)$$

ここで, ある粒子の計算に用いる粒子は有効半径 h 内の粒子で計算される. j は有効半径 h 内の全ての粒子を表し, m は粒子の質量, ρ_j は各粒子の持つ密度である. 関数 w_{ij} はカーネル関数であり式(2)のように表される.

$$w_{ij} = \begin{cases} \frac{15}{\pi h^3} (1 - \frac{|r_i - r_j|}{h})^3 & 0 \leq \frac{|r_i - r_j|}{h} \leq 1 \\ 0 & 1 < \frac{|r_i - r_j|}{h} \end{cases} \quad (3)$$

式(2)を用いることによって、第 i 粒子点における密度 ρ_i は、

$$\rho_i = \sum_j m_j w_{ij} \quad (4)$$

と表わされ、 w_{ij} の和となるのが SPH 法の特徴である。また、粒子の挙動計算には式(5)に示されるナビエ・ストークス方程式を用いて計算し、また連続の式に変わり圧力の計算に式(6)を用いることで、非圧縮性を表現する。

$$\ddot{\mathbf{r}}_i = m_j \sum_j \left\{ - \left(\frac{P_i}{\rho_i^2} + \frac{P_j}{\rho_j^2} \right) \nabla w_{ij} \right\} + \mathbf{a}_i \quad (5)$$

$$\mathbf{P} = \beta \left[\left(\frac{\rho_1}{\rho_0} \right)^\gamma - 1 \quad \left(\frac{\rho_2}{\rho_0} \right)^\gamma - 1 \quad \dots \quad \left(\frac{\rho_n}{\rho_0} \right)^\gamma - 1 \right]^T \quad (6)$$

P_i は第 i 粒子の圧力であり、粘性項や重力など圧力以外の項は $\mathbf{a}_i$ としてまとめて表記し、 β および γ は安定性や表現力を考慮して次元によって調整される定数である。また、仮想容器内の全粒子質量が一定の場合には、異なる 2 つのシミュレータでも、ベータを以下のように調整すると同じような安定性となることが示されてきている [2]。

$$\beta_2 = \left(\frac{m_a}{m_b} \right)^{\frac{2}{3}} \beta_1 \quad (7)$$

β_1 は質量 m_a のとき安定するフィードバックゲイン、 β_2 は質量 m_b のとき安定するフィードバックゲインである。

4. 挙動確認シミュレーション

まず、Fig.1 に示されるような環境において、全ての粒子に同じ (6) 式の β を用いた際に、安定となる最大の β を計測した。シミュレーションでは、900 個の粒子を用い、粒子が止まった状態で容器を振動させ粒子全体に刺激を与え、粒子が発散せずに安定となる最大の β を計測した。この際に、c 領域の重い質量 m_2 を $1/1.1m_1$ と $1/1.2m_1$ の 2 種類の設定を用い、また質量が変動する領域 b の高さも $b=0.4, 0.6T$ の 2 種類を行った。シミュレーションと計測結果を Table 1 に示す。

Table1. Simulation Result with previous method

	b = 0.4T	b = 0.6T
$m_2 = 1/1.1m_1$	$\beta m_1 = 82000$	$\beta m_1 = 83000$
$m_2 = 1/1.2m_1$	$\beta m_1 = 81000$	$\beta m_1 = 82000$

シミュレーション結果から、既存研究から導かれている全粒子が同一の質量を持つ場合の粒子質量と β の関係式 (7) 式が成立しないこととともに、 b 領域の高さが影響を与えることがわかった。 b 領域の高さは、粒子が移動する際には粒子質量の変化率に影響を与えるため、粒子質量の変化率が安定な β に影響を与えているものと考えられる。そこで、質量変動率を考慮した新たなフィードバック則を提案し、その効果を検証する。

5. 質量変化の補償

質量が時間に対して変動する場合、式(4)を 1 階、2 階微分すると、以下ようになる。

$$\dot{\rho} = \sum_j (\dot{m}_j w_{ij} + m_j \nabla w_{ij} \dot{\mathbf{r}}) \quad (8)$$

$$\ddot{\rho} = \sum_j (\ddot{m}_j w_{ij} + \nabla w_{ij} (2\dot{m}_j \dot{\mathbf{r}} + m_j \ddot{\mathbf{r}}) + m_j \nabla w_{ij} \ddot{\mathbf{r}}) \quad (9)$$

この中で、既存研究では m の 1 階、2 階微分の項目は考慮されていなかった。そこで、各粒子質量の 1 階微分を補償する項目を考え、以下の示すように (5) 式のナビエ・ストークス方程式に新たに付加する。

$$\ddot{\mathbf{r}}_i = \sum_j \left\{ m_j \left\{ - \left(\frac{P_i}{\rho_i^2} + \frac{P_j}{\rho_j^2} \right) \nabla w_{ij} \right\} - 2 \frac{\dot{m}_j}{m_j} \dot{\mathbf{r}} \right\} + \mathbf{a}_i \quad (10)$$

この項を付加することにより、(10) 式を (9) 式に代入すれば、 $\ddot{m}_i$ の項を除去することができ、既存研究での条件に近づけることができると考えられる。前章でのシミュレーションと同じ条件のもとで、最大のフィードバックゲイン β_1 を求めた結果を Table 2 に示す

Table 2 Simulation result with proposed method

	b = 0.4T	b = 0.6T
$m_2 = 1/1.1m_1$	$\beta m_1 = 83000$	$\beta m_1 = 84000$
$m_2 = 1/1.2m_1$	$\beta m_1 = 81000$	$\beta m_1 = 83000$

Table2 に示すように質量の時間変化に対する項を考慮することで、Table1 の結果と比べて最大となるフィードバックゲインの値を若干大きくすることができた。しかしながら、完全に質量変動を補償できた場合には、 $b=0.4T$ と $b=0.6T$ の結果が同じようになると考えられるので、完全に補償することとはできていないと思われる。この原因として、式(10)において、 m の 1 階微分の項のみしか補償していないことが考えられる。なお、2 階微分の項をフィードバックした場合も行ったがあまり良好な結果が得られなかった。これは 2 階微分を差分から算出する際の誤差による影響と考えられる。

6. 結言

SPH 流体シミュレーションにおいて、異なる粒子質量を持つ流体シミュレーションの挙動の確認と、より安定な計算手法の検討を行った。シミュレーションでは容器内に、軽い粒子、重い粒子、それを接続する質量設定の三つの領域を設定し、この環境下では既存のフィードバックゲインの設定手法が満足されないことを確認できた。また、その結果から、質量の時間変化を考慮したフィードバックゲインを設定することでより高いフィードバックゲインで安定させることができた。しかしながら、現在の補償方法では質量の 1 階微分までしか考慮していないため、想定された補償ができていないわけではなく、更なる検討が必要である。また、将来的な課題としては、安定な計算手法とともに、質量設定の方法も検討していく必要がある。

文 献

[1] Lucy, L. B “A Numerical Approach to the Testing of the Fission Hypothesis” Astron. J, 82, pp. 1013-1024, 1977.
[2] 川井昌之、鈴木洋平, “SPH を用いた粒子数変動型実時間流体シミュレータのパラメータ自動調整手法の考察” 日本バーチャルリアリティ学会大会, No.16, 2011.
[3] B. Solenthaler, and R. Pajarola. “Density Contrast SPH Interfaces” ACM SIGGRAPH Symposium Computer Animation, pp. 211-218, 2008.
[4] Barbara Solenthaler and ETH Zurich and Markus Gross “Two-Scale Particle Simulation” ACM SIGGRAPH (Vancouver, Canada), ACM Transactions on Graphics, vol. 30, no. 4, pp. 81:1-81:8, 2011.