平板のための熱伝導方程式の導出と熱座屈問題への応用

Derivation of Heat Conduction Equation for Thermal Deformation of Plate, and Its Application to Thermal Buckling Problem

正 石田良平(阪府大)

Ryohei ISHIDA, Osaka Prefecture University, Gakuen-cho, Naka-ku, Sakai, Osaka

This report deals with a derivation of heat conduction equation for plate bending analysis and an application of the thermal buckling problem of a thin plate. In the plate, temperature distribution of the direction perpendicular to the plate surface is assumed to be linear function. A finite element formulation of a thermal buckling problem of plate is also performed. As an application of our formulation, a thermal buckling problem of the plate subjected to local heating on the plate surface is analyzed. We can obtain buckling temperature from the finite element analysis. Also, under the transient analysis of temperature, we can estimate when the buckling occurs.

Key Words: Thermal Stresses, Thermal Buckling, Plane Stress Problem, Finite Element Method, Eigenvalue.

1. はじめに

温度分布が板の面内座標の関数である場合には板の熱弾性問題は三次元熱弾性論で扱うには適切ではなく、一般には平面応力問題、すなわち、二次元熱弾性問題として扱われる。一方、圧力負荷のような板面に横荷重を受ける板の場合の解析は面外変形(たわみ)の解析が主体であるため、大たわみ理論を用いない限り、微小変形理論に基づく解析では面内変形は面外変形とは独立であり、温度分布が板の面内座標の関数として与えられる場合、板のたわみには影響を与えない。

微小変形理論の元で面外変形に与える面内力の影響を考慮するものとしては、板の座屈理論がある。板の座屈理論は板に弾性座屈を生じさせる限界の面内力を求めるものであり、弾性不安定問題として定式化され、最終的には固有値問題として取り扱われる。

厚さがそれに直交する他の二方向の寸法に比べて小さい板の場合の熱伝導問題も三次元熱伝導問題として扱うのは計算上合理的とはいえない。そのため、なんらかの適切な近似が必要であると思われる。板の熱弾性問題では、後述するように、thermal forceおよびthermal momentと呼ばれる項が現れ、前者は二次元熱弾性問題(面内変形)に関連し、後者は板曲げ(面外変形)変形に関連する。前者は温度の板厚方向座標の偶関数部分に関連し、後者は奇関数部分に関連する。

本報告では、平板の熱座屈問題を念頭においた熱伝導方程式の導出とそれを用いた熱弾性問題の有限要素法による定式化についてまとめる。簡単な計算例を用いて熱座屈問題への適用とならびに著者なりに板の熱弾性問題の定式化に

ついてまとめ、簡単な例題で板の温度分布の影響を調べてみることにする。

2. 板の熱伝導問題

2.1 板の熱伝導問題の特徴

一般に三次元熱伝導方程式は次の形を持つ。

$$\nabla^2 T + Q = \kappa^{-1} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (1)$$

ここで ∇^2 は三次元ラプラス演算子、 T は基準温度からの温度変化、 Q は単位体積単位時間当たりの熱発生量、 κ は温度伝導率、 t は時間である。この熱伝導方程式は適切な境界条件と初期条件の下で解かれる。

さて、いま厚さ(z)がそれに直交する他の二方向(x, y)の寸法に比べて小さい板状物体の境界条件は、図1(a)のような x - y 境界縁の法線方向の熱の授受と同図(b)のような板上下面からの熱の授受があるが、板の場合は(b)のほうが圧倒的に大きい。

Fig.1 境界縁からの熱の授受(a)と面からの熱の授受(b)

もし、(b)のタイプの熱の授受が板全面にわたって生ずるなら、 z 方向の熱の移動のみを考えた一次元熱伝導問題として解析するのが適切である。一方、同じように(b)のタイプの熱の

授受が板の表面で部分的に発生するなら、問題は三次元となるが、近似によって問題の次元を一つ減らせるならば、解析は簡単になることが想像できる。

2. 2 二次元熱伝導問題への変換

Fig.2 平板表面近傍の熱バランス

三次元熱伝導問題から板表面からの熱の授受を考慮して x - y 面内の二次元熱伝導問題にするために、熱のバランスを考える必要がある。いま、図2のように厚さ h の板の上下面から出入りする熱量 (単位: W/m^2) を q^+ , q^- と定義する。このとき、 x , y 方向の熱流束を $f_x = \lambda_t \partial T / \partial x$, $f_y = \lambda_t \partial T / \partial y$ として体積 $dx dy \delta$ 部分の熱のバランスは、板の上下面近傍で

$$f_x dy \delta + f_y dx \delta - \left(f_x + \frac{\partial f_x}{\partial x} \right) dy \delta - \left(f_y + \frac{\partial f_y}{\partial y} \right) dx \delta + f_z dx dy - q^+ dx dy = \rho c \frac{\partial T}{\partial t} dx dy \delta \quad (2)$$

$$f_x dy \delta + f_y dx \delta - \left(f_x + \frac{\partial f_x}{\partial x} \right) dy \delta - \left(f_y + \frac{\partial f_y}{\partial y} \right) dx \delta - f_z dx dy + q^- dx dy = \rho c \frac{\partial T}{\partial t} dx dy \delta \quad (3)$$

である。ここで、 ρ は密度、 c は比熱、 t は時間、 δ は板表面の微小厚さである。

式(2)と(3)は、 κ を温度伝導率として

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} - \frac{1}{\delta} \frac{\partial T}{\partial z} - \frac{1}{\lambda_t \delta} q^+ = \frac{1}{\kappa} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (4)$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{1}{\delta} \frac{\partial T}{\partial z} + \frac{1}{\lambda_t \delta} q^- = \frac{1}{\kappa} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (5)$$

と変形できる。

さて、式(4)と(5)で、 T^+ と T^- をそれぞれ板の上面と下面の温度として

$$T = \frac{1}{2} (T^+ + T^-) + \frac{z}{h} (T^+ - T^-) \quad (6)$$

と書き表すと、

$$\frac{\partial^2 T^+}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T^+}{\partial y^2} - \frac{1}{h \delta} (T^+ - T^-) - \frac{1}{\lambda_t \delta} q^+ = \frac{1}{\kappa} \frac{\partial T^+}{\partial t} \quad (7)$$

$$\frac{\partial^2 T^-}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T^-}{\partial y^2} + \frac{1}{h \delta} (T^+ - T^-) + \frac{1}{\lambda_t \delta} q^- = \frac{1}{\kappa} \frac{\partial T^-}{\partial t} \quad (8)$$

となり、さらに、 $\delta \rightarrow h/2$ として

$$\frac{\partial^2 T_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T_1}{\partial y^2} - \frac{4}{h^2} T_1 - \frac{2}{\lambda_t h} q_1 = \frac{1}{\kappa} \frac{\partial T_1}{\partial t} \quad (9)$$

$$\frac{\partial^2 T_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T_2}{\partial y^2} - \frac{2}{\lambda_t h} q_2 = \frac{1}{\kappa} \frac{\partial T_2}{\partial t} \quad (10)$$

となる。ここで、

$$T_1 = T^+ - T^-, \quad T_2 = T^+ + T^-, \quad q_1 = q^+ + q^-, \quad q_2 = q^+ - q^-.$$

式(9)と(10)が板の上下面からの熱の授受を考慮した二次元熱伝導問題を記述する微分方程式になる。この二つの微分方程式はそれぞれ単独で解くことができ、これから T_1 と T_2 が計算できれば板の上下面の温度分布と時間変化は

$$T^+ = \frac{1}{2} (T_1 + T_2), \quad T^- = \frac{1}{2} (T_2 - T_1) \quad (11)$$

から計算できる。また、緒言で述べた thermal force N^T および thermal moment M^T は

$$N^T = \frac{\alpha E}{1-\nu} \int_{-h/2}^{h/2} T dz = \frac{\alpha E}{1-\nu} \frac{1}{2} (T^+ + T^-) h = \frac{1}{2} \frac{\alpha E h}{1-\nu} T_2 \quad (12)$$

$$M^T = \frac{\alpha E}{1-\nu} \int_{-h/2}^{h/2} T z dz = \frac{\alpha E}{1-\nu} \frac{1}{12} (T^+ - T^-) h^2 = \frac{1}{12} \frac{\alpha E h^2}{1-\nu} T_1 \quad (13)$$

で表される。

式(9)と(10)は線形微分方程式なので、無次元表示が便利である。いま、次のように諸量を表す。

$$T_i = \frac{q_0 b}{\lambda_t} \bar{T}_i, \quad x = b \xi, \quad y = b \eta, \quad h = b \bar{h}, \quad a = b \bar{a}, \quad t = \frac{b^2}{\kappa} \tau, \quad \bar{q}_i = \frac{q_i}{q_0}$$

このとき、式(9)と(10)は次のように無次元表示される。

$$\frac{\partial^2 \bar{T}_1}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \bar{T}_1}{\partial \eta^2} - \frac{4}{\bar{h}^2} \bar{T}_1 - \frac{2}{\bar{h}} \bar{q}_1 = \frac{\partial \bar{T}_1}{\partial \tau} \quad (14)$$

$$\frac{\partial^2 \bar{T}_2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \bar{T}_2}{\partial \eta^2} - \frac{2}{\bar{h}} \bar{q}_2 = \frac{\partial \bar{T}_2}{\partial \tau} \quad (15)$$

たとえば、 x 方向長さ $2a$, y 方向長さ $2b$ の板の周囲が基準温度に保たれている平板の温度分布の解析解は

$$\bar{T}_i = - \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{8 \bar{q}_i \sin \alpha_n \xi \sin \beta_m \eta}{\bar{a} \alpha_n \beta_m (\alpha_n^2 + \beta_m^2 + 4 \delta_{ii} / \bar{h}^2)} \cos \alpha_n \xi \cos \beta_m \eta \times \left[1 - e^{-(\alpha_n^2 + \beta_m^2 + 4 \delta_{ii} / \bar{h}^2) \tau} \right] \quad (16)$$

となる。ここで、加熱領域は $-\xi_i < \xi < \xi_i$, $-\eta_i < \eta < \eta_i$ で $\bar{q}_i$ は一様であるとしている。 α_n と β_m は $\alpha_n = (2n-1)\pi/2\bar{a}$, $\beta_m = (2m-1)\pi/2$ であり、 δ_{ii} はクロネッカーデルタである。

3. 熱座屈の有限要素法

3.1 定式化

ここでは、エネルギー原理に基づく定式化について述べる。まず、平板のひずみは

$$\varepsilon_{xx} = \varepsilon_{xx0} - z \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}, \quad \varepsilon_{yy} = \varepsilon_{yy0} - z \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2}, \quad \gamma_{xy} = \gamma_{xy0} - 2z \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y}. \quad (17)$$

ここで、添字 "0" を付けた量は面内ひずみで次式で定義される。

$$\varepsilon_{xx0} = \frac{\partial u_0}{\partial x}, \quad \varepsilon_{yy0} = \frac{\partial v_0}{\partial y}, \quad \gamma_{xy0} = \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x}. \quad (18)$$

いま、板の材料の線膨張係数を α , 温度を T とすると、熱ひ

ずみは αT であるから、弾性ひずみ $\varepsilon_{xx}^e, \varepsilon_{yy}^e, \gamma_{xy}^e$ は

$$\varepsilon_{xx}^e = \varepsilon_{xx} - \alpha T, \quad \varepsilon_{yy}^e = \varepsilon_{yy} - \alpha T, \quad \gamma_{xy}^e = \gamma_{xy}. \quad (19)$$

となるから、熱応力は

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_{xx} + \nu \varepsilon_{yy}) - \frac{E}{1-\nu} \alpha T, \\ \sigma_{yy} &= \frac{E}{1-\nu^2} (\nu \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}) - \frac{E}{1-\nu} \alpha T, \\ \sigma_{xy} &= \frac{E}{2(1+\nu)} \gamma_{xy}. \end{aligned} \quad (20)$$

で表される。熱弾性ひずみエネルギー

$$U = \frac{1}{2} \int_V [\sigma_{xx}^e \varepsilon_{xx}^e + \sigma_{yy}^e \varepsilon_{yy}^e + \sigma_{zz}^e \varepsilon_{zz}^e + \sigma_{xy}^e \gamma_{xy}^e + \sigma_{yz}^e \gamma_{yz}^e + \sigma_{zx}^e \gamma_{zx}^e] dV \quad (21)$$

に式(17)～(20)を代入すると

$$\begin{aligned} U &= \int_S \left\{ A \left(\frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial v_0}{\partial y} \right)^2 + \frac{(1-\nu)A}{4} \left[\left(\frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right)^2 - 4 \frac{\partial u_0}{\partial x} \frac{\partial v_0}{\partial y} \right] \right. \\ &\quad + \frac{D}{2} \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right)^2 + (1-\nu)D \left[\left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right] \\ &\quad \left. - N^T \left(\frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial v_0}{\partial y} \right) + M^T \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right) + f(T) \right\} dS \end{aligned} \quad (22)$$

となる。ここで、 $f(T)$ は温度 T のみの関数、 S は x - y 面内の面

積を表す。また、 $A = \frac{Eh}{1-\nu^2}$, $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$ である。

面内力の仕事の項は

$$W = \frac{1}{2} \int_S \left[N_x \left(\frac{\partial w_0}{\partial x} \right)^2 + 2N_{xy} \frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial w_0}{\partial y} + N_y \left(\frac{\partial w_0}{\partial y} \right)^2 \right] dS \quad (23)$$

となる。ここで、面内力は座屈直前の初期面内力である。

詳細は省略するが、 $\delta U + \delta W = 0$ とすれば、

$$\begin{aligned} D \nabla^4 w_0 &= -\nabla^2 M^T \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial x} \left(N_x \frac{\partial w_0}{\partial x^2} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(N_{xy} \frac{\partial w_0}{\partial y} \right) \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial y} \left(N_{xy} \frac{\partial w_0}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(N_y \frac{\partial w_0}{\partial y^2} \right) \end{aligned} \quad (24)$$

が得られる。面内力が x, y に無関係なら、

$$D \nabla^4 w_0 = q - \nabla^2 M^T + N_x \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + 2N_{xy} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} + N_y \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \quad (25)$$

が得られる。一方、面内変形を支配する方程式は

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} \right) + \frac{1-\nu}{2} \left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} \right) &= \frac{1}{A} \frac{\partial N^T}{\partial x}, \\ \frac{1-\nu}{2} \left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} \right) + \left(\nu \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} \right) &= \frac{1}{A} \frac{\partial N^T}{\partial y}. \end{aligned} \quad (26)$$

である。 U と W は、面内変形に関する項を除いて、次のように表現することができる。

$$U = \frac{D}{2} \int_S \left\{ \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \right\}^T \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{12} & c_{22} & c_{23} \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} \end{bmatrix} \left\{ \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right\} dS \quad (27)$$

$$W = \frac{h}{2} \int_S \left\{ \frac{\partial w_0}{\partial x} \right\}^T \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} \end{bmatrix} \left\{ \frac{\partial w_0}{\partial y} \right\} dS \quad (28)$$

ここで、

$$\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{12} & c_{22} & c_{23} \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu)/2 \end{bmatrix} = [D], \quad \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} \end{bmatrix} = [\sigma]$$

である。

いま、式(27)と(28)で

$$\sigma_{ij} = \alpha_i E \frac{q_0 b}{\lambda_i} \bar{\sigma}_{ij}, \quad S = b^2 \bar{S}, \quad w_0 = b \bar{w}_0$$

とおくと、

$$U = \frac{D}{2} \int_{\bar{S}} \left\{ \frac{\partial^2 \bar{w}_0}{\partial \xi^2} \right\}^T \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{12} & c_{22} & c_{23} \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} \end{bmatrix} \left\{ \frac{\partial^2 \bar{w}_0}{\partial \eta^2} \right\} d\bar{S} \quad (29)$$

$$W = \frac{h}{2} \alpha_i E \frac{q_0 b}{\lambda_i} b^2 \int_{\bar{S}} \left\{ \frac{\partial \bar{w}_0}{\partial \xi} \right\}^T \begin{bmatrix} \bar{\sigma}_{xx} & \bar{\sigma}_{xy} \\ \bar{\sigma}_{xy} & \bar{\sigma}_{yy} \end{bmatrix} \left\{ \frac{\partial \bar{w}_0}{\partial \eta} \right\} d\bar{S} \quad (30)$$

となる。

有限要素法の定式化のために、平板内に $\Delta \xi, \Delta \eta$ の長方形部分を考える。この部分でのたわみ関数を次のようにおく。

$$\bar{w}_0(\xi, \eta) = \sum_{k=1}^N a_k f_k(\xi, \eta) = \{a\}^T \{f(\xi, \eta)\} \quad (32)$$

ここで、 a_k は定数、 $f_k(\xi, \eta)$ は内挿関数である。

式(32)を用いて

$$\{z\} = \{\bar{w}_0, \partial \bar{w}_0 / \partial \xi, \partial \bar{w}_0 / \partial \eta\}^T = [c] \{a\} \quad (33)$$

と書くことができる。 $[c]$ マトリックスの詳細は省略する。

4つの節点 i, j, k, l について合成すると、

$$\{Z\} = \begin{bmatrix} \{z_i\} \\ \{z_j\} \\ \{z_k\} \\ \{z_l\} \end{bmatrix} = [C] \{a\} = \begin{bmatrix} [c_i] \\ [c_j] \\ [c_k] \\ [c_l] \end{bmatrix} \{a\} \quad (34)$$

となる。式(29)と(30)に式(34)を代入すると、

$$U = \frac{D}{2} \{Z\}^T [C^{-1}]^T \int_{\bar{S}} [B]^T [D] [B] d\bar{S} [C^{-1}] \{Z\} \quad (35)$$

$$W = \frac{h}{2} \alpha_i E \frac{q_0 b}{\lambda_i} \{Z\}^T [C^{-1}]^T \int_S [G]^T [\bar{\sigma}] [G] dS [C^{-1}] \{Z\} \quad (36)$$

となる。ここで、 $[\bar{\sigma}] = \begin{bmatrix} \bar{\sigma}_{xx} & \bar{\sigma}_{xy} \\ \bar{\sigma}_{xy} & \bar{\sigma}_{yy} \end{bmatrix}$ 、 $[C^{-1}]$ マトリックスは式(34)の $[C]$ マトリックスの逆行列である。 $[B]$ 、 $[G]$ マトリックスについては省略する。

式(35)、(36)の変分をとって演算、全体にわたって合成すると、最終的に次のような形の固有値方程式が得られる。

$$[X][Z] = \lambda[Y][Z] \quad (37)$$

ここで、 $[X]$ 、 $[Y]$ は全体剛性マトリックス、初期応力マトリックス、 λ は固有値であり、 $[Z]$ は固有ベクトルである。たとえば、

$$\lambda = \frac{q_0 b}{\lambda_i} \text{に 対応させると,}$$

$$[X] = \frac{(h/b)^2}{12(1-\nu^2)\alpha_i} [C^{-1}]^T \int_S [B]^T [D] [B] dS [C^{-1}] \quad (38)$$

$$[Y] = [C^{-1}]^T \int_S [G]^T [\bar{\sigma}] [G] dS [C^{-1}] \quad (39)$$

となる。

3. 数値計算例

x 、 y 方向の長さが $2a$ 、 $2b$ ($a \geq b$)の長方形板が周辺単純支持されていて、板表面から部分的に一樣な熱の授受がある場合の熱座屈について考える(図3)。 x - y 面内の力学的境界条件は、 x 軸方向には面内変形が拘束され、 y 軸方向には自由熱膨張が可能であるとする。

Fig.3 周辺単純支持板-1

図3で座屈モードが x 軸について対称、 y 軸について対称の場合と反対象の場合を考えるものとして、解析領域を図4のような1/4領域とする。この例題では、 $\xi_s = \eta_i = 0.5$ とする。

長方形板の熱弾性座屈問題では、まず通常の有限要素法あるいは解析解を用いて面内の熱応力分布を計算し、得られた熱応力分布を式(36)の $[\bar{\sigma}]$ として使い、式(37)から固有値を計算することになる。

温度分布と熱応力分布

図5に $a/b=1.5$ 、 $h/b=0.01$ 、 $\bar{q}_1^- = -200$ 、 $\bar{q}_1^+ = -10$ ($\bar{q}^+ = -105$ 、 $\bar{q}^- = -95$ に対応)とし、無次元時間 $\tau=0.1$ の場合の無次元平

Fig.4 解析領域

Fig.5 温度分布 ($\tau=0.1$, $a/b=1.5$)

Fig.6 σ_{xx} の分布 ($\tau=0.1$, $a/b=1.5$)

Fig.7 σ_{yy} の分布 ($\tau=0.1$, $a/b=1.5$)

均温度分布を示す。図6、7に対称条件の下での σ_{xx} 、 σ_{yy} の分

布を示す。

座屈問題の解

$a/b=1.5$, 座屈モード1の場合の固有値と座屈温度 $(0,0)$ の温度)の時間的変化を図8に示す。図8で、横軸は無次元時間である。

式(39)から計算される固有値 $\lambda_c = \frac{q_0 b}{\lambda_i}$ は温度の単位を持っており、図8のように時間によって変化する。一方、固有値 λ_c は温度そのものを表すわけではなく、第2章の無次元量の定義から、無次元温度の基準値であるから、実際の温度変化量は、無次元量の定義から、 $T_i = \lambda_c \bar{T}_i$ となり、この温度変化量が実際の座屈にいたるまでの温度変化量である。図9に $\tau=0.1$ におけるモード1の変形を示す。

Fig.8 固有値の時間変化

図8は、各無次元時刻で座屈にいたるまでの板の中央点 $(0,0)$ の温度変化 T_c を超えなければ平板は座屈しないことを表している。もし、平板の温度変化が 24 K 以下であれば定常温度場に至っても $T_c(0,0)$ を超えない(図10の青線)ので、平板は熱座屈することはない。一方、 $\tau=0.1$ において温度変化が 36 K を超えるとすると、 $\tau=0.1$ において平板は熱座屈することになる。

たとえば、いま考えている系、すなわち、

$a/b=1.5$, $h/b=0.01$ の薄板の中央部が正方形領域 $(0.5b \times 0.5b)$ が加熱され、 $\bar{q}_1 = -200$, $\bar{q}_1 = -10$ ($\bar{q}^* = -105$, $\bar{q}^- = -95$ に対応)

ただし、薄板の四辺は基準温度に保たれている。
熱的条件の下、図3のように

x - y 面内において x 方向の面内変形が拘束

板の周辺縁の面外変形が拘束

という系において、薄板の材料定数が $\lambda_i = 16\text{ W/(m}\cdot\text{K)}$,

$\rho = 7920\text{ kg/m}^3$, $c = 0.499\text{ KJ/(kg}\cdot\text{K)}$ であるとする。

このとき、 $q_0 = 16\text{ W/m}^2$ (上面から 1.68 kW/m^2 の熱が入り、下

Fig.9 座屈モード1 ($\tau=0.1$, $a/b=1.5$)

面から 1.52 kW/m^2 の熱が逃げる), $b=1\text{ m}$ のとき $q_0 b/\lambda_i = 1\text{ K}$ となり、この値が固有値 λ_c である。この値には加熱開始から $\tau=0.04$ で到達する(図10では、黄緑線で表示された $T_c(0,0)$ 曲線と黄線で表示された $T_2(0,0)$ との交点のフーリエ数)。無次元時刻 $\tau=0.04$ は実時間に換算すると $t=9880\text{ s}=2.74\text{ hr}$ となる。このとき、平板の中央部では、初期温度から 39.5 K の温度差が生じていることになる。

Fig.10 座屈時刻の決定法

参考文献

最後に、入門的な文献をいくつか挙げておく。

○Hetnarski,R.B.(Ed.), Thermal Stresses I, North-Holland, 1986.

↑この本は、熱応力に関してまとめられた最後のシリーズかも

○Boley,B.A. and Weiner,J.H., Theory of Thermal Stresses, John-Wiley and Sons, Inc., 1969

○Gossard,M.L., et al., Thermal Buckling of Plates, NACA TN-2771, 1952.

↑熱座屈問題の先駆け的なものか？

○Carslaw,H.S. and Jaeger,J.C., Conduction of Heat in Solids, Oxford, 1959

↑古い文献ばかりですみません。