B-30

バドミントンのシャトルコックの飛翔軌道解析を用いた 空気力学特性評価の高精度化

神田 芳文^{*1}

Accurate Evaluation of Aerodynamic Properties of Badminton Shuttlecock using Trajectory Analysis

Yoshifumi KANDA^{*1}

^{*1} Seikei Univ. Dept. of Computer and Information Science
Kichijoji-Kitamachi 3, Musashino, Tokyo, 180-8633 Japan

Computer simulations for the prediction of badminton shuttlecock trajectories have been performed widely. Aerodynamic properties, such as drag, lift and pitching moment coefficients for a simulation are usually measured by a wind tunnel experiment. For the sake of simplicity, it is desirable to measure the aerodynamic properties using images of shuttlecock trajectory experiment captured by a high speed video camera without a wind tunnel experiment. This paper describes a possibility for an identification of shuttlecock aerodynamic properties which depend on Reynolds number and angle of attack from a trajectory analysis. We present a new method to overcome difficulties which arise from variations of velocity and angle of attack during a shuttlecock flight. Fairly good results of shuttlecock aerodynamic properties which depend on Reynolds number and angle of attack are obtained using the present identification method through horizontal projection experiments at a variety of initial velocities and an inclined projection experiment.

Key Words : Badminton shuttlecock, Aerodynamic property, Trajectory simulation, Image processing

1. 緒 言

バドミントンはその競技人口の多さからして、非常に関心の高いスポーツである。さらに、用いられるシャトルコック（以下、単にシャトルと呼ぶ）は球技の球としては特異な形状をしており、その飛翔特性に強い興味もたれていて、飛翔軌道シミュレーションを行う⁽¹⁾⁽²⁾⁽⁴⁾⁽⁵⁾ことも多くなっている。シミュレーションにおいてはシャトルの抗力係数、揚力係数、ピッチングモーメント係数などの空気力学特性が不可欠であるが、それらは通常風洞実験により計測される⁽³⁾⁽⁵⁾⁽⁶⁾⁽⁷⁾。風洞実験においては所望の空気力学特性が計画的に精度よく計測できる反面、風洞という設備が不可欠である上に、実験準備に多くの時間と労力を必要とする。そこで、比較的簡単に得られるシャトルの飛翔映像から軌道を解析し、その軌道が運動方程式を満たすように空気力学特性を定めることにより、空気力学特性を計測する方法⁽¹⁾が、簡便で短時間に実施できる自然な計測方法として注目されている。

しかし、シャトルの飛翔中に速度や迎角は刻一刻と相当程度変化することは避けられない事実であり、空気力学特性値をレイノルズ数や迎角の関数として求める高精度の計測を目指した場合、極度に局所的なごく短時間（すなわち短距離）の飛翔軌道から空気力学特性を割り出すこととなり、極めて困難な計測手法であることが認識される。実際、これまでに飛翔軌道から同定された空気力学特性値は数 m の飛翔中での平均値であって、特定レイノルズ数あるいは特定迎角における値とは言い難い側面を有していた。

本報では鉛直平面内のシャトルの 2 次元的な飛翔に限定し、まずレイノルズ数や迎角によって変化する空気力学特性値を、飛翔軌道解析から同定する方法の原理的困難さを調査し、それを踏まえて飛翔実験状況の設定と同定手法の高精度化の道を探り、迎角が 0° の場合についてのレイノルズ数による抗力係数の変化の計測を試み、

^{*1} 正員、成蹊大学 理工学部（〒180-8633 東京都武蔵野市吉祥寺北町 3-3-1）
E-mail: kanda@st.seikei.ac.jp

0° でない特定迎角と特定レイノルズ数の場合について、飛翔軌道解析から抗力係数、揚力係数およびピッチングモーメント係数を計測し得る可能性について示す。

2. 飛翔軌道からの空気力学特性同定方法

シャトルの鉛直平面内の2次元飛翔を扱うものとし、図1に示すようにシャトルの進む水平方向に x 軸、鉛直方向上向きに y 軸をとり、シャトル重心位置の座標を (x, y) 、シャトルの長軸と x 軸のなす角（ピッチ角）を β 、重心速度 v の方向ベクトルと x 軸のなす角（投射角）を θ 、シャトルの長軸と重心速度の方向ベクトルのなす角（迎角）を α とする。シャトルの質量を m 、ピッチ角方向の重心まわりの慣性モーメントを I_t 、重力加速度を g 、重心位置に働く抗力を D 、揚力を L 、ピッチングモーメントを M 、ピッチング回転運動の減衰係数を c 、時間に関する微分を $\dot{}$ で表せば、 x 軸方向、 y 軸方向、ピッチ角方向の運動方程式はそれぞれ次式のように表せる。

$$m\ddot{x} + D \cos \theta + L \sin \theta = 0 \quad (1)$$

$$m\ddot{y} + D \sin \theta - L \cos \theta + mg = 0 \quad (2)$$

$$I_t \ddot{\beta} + c\beta + \left| \frac{dM}{d\alpha} \right| \alpha = 0 \quad (3)$$

ただし、式(1),(2),(3)に現れる抗力 D 、揚力 L およびピッチングモーメント M は、シャトルの重心速度を v 、スカート部末尾の円形断面積を A 、空気密度を ρ 、シャトルの全長を h 、抗力係数を C_D 、揚力係数を C_L 、ピッチングモーメント係数を C_M として、それぞれ次式のように表せる。

$$D = \frac{1}{2} \rho C_D v^2 A \quad (4)$$

$$L = \frac{1}{2} \rho C_L v^2 A \quad (5)$$

$$M = \frac{1}{2} \rho C_M v^2 A h \quad (6)$$

飛翔実験データをもとに運動方程式(1),(2),(3)から抗力係数、揚力係数、ピッチングモーメント係数を算出することを考えた場合に、実験映像の解析から変位、角変位、速度、角速度、加速度、角加速度などの値を求めて、上式に代入して解く方法が考えられるが、この方法では加速度、角加速度が現状の画像解析技術では精度良く求まらないことから、信頼のおける空気力学特性を同定することは極めて困難である。

そこで、とり得る空気力学特性値の範囲内で有効桁を限定した値を種々与えて式(1),(2),(3)に基づき軌道シミュレーションを行い、実験結果に最もフィットする値を探索して空気力学特性を同定する方法が実用的な方法⁽¹⁾と考えられる。この方法では高速で数値誤差が少ないシミュレーション技法と効率的な最適値探索手法が確立されていることが前提となる。

こうした目的に沿って式(1),(2),(3)の数値時間積分を行う手法としては現状では Runge-Kutta 法が望ましいと考えられる。その際、式(1),(2),(3)は1階微分方程式に書き改めた後 Runge-Kutta 法が適用される。

Fig.1 Coordinate system and forces on shuttlecock in 2D flight

Table 1 Dimensions and physical properties of tested shuttlecock

Fig.2 Tested shuttlecock (YONEX New Official)

Shuttlecock length [mm]	85.4
Skirt diameter [mm]	66.0
Nose diameter [mm]	26.3
Position of center of mass [mm]	29.2
Mass [g]	5.2
Moment of inertia [kgm ²]	2.79×10^{-6}

次に空気力学特性の同定方法について述べる．直接同定すべき空気力学特性としてここでは抗力係数 C_D ，揚力係数 C_L ，ピッチングモーメントの迎角による微分 $dM/d\alpha$ を考え，それらは短い飛翔距離の間では一定値であると仮定する．

式(1),(2),(3)に現れる C_D ， C_L ， $dM/d\alpha$ を定数として解いた解が飛翔実験の結果に最適フィットするようにその値を定める必要があるが，その際のフィットの程度を評価するために次のような指標 E を導入し， E が最小になるように 3 定数の値を定める．

$$E = \sum_{i=1}^n \{ (x(t_i) - x_s(t_i))^2 + (y(t_i) - y_s(t_i))^2 + w(\beta(t_i) - \beta_s(t_i))^2 \} \quad (7)$$

ただし， n は映像コマ数であり， t_i は各コマの時刻であり， $x(t_i)$ ， $y(t_i)$ ， $\beta(t_i)$ はそれぞれ x 方向変位， y 方向変位，ピッチ角の実験値であり， $x_s(t_i)$ ， $y_s(t_i)$ ， $\beta_s(t_i)$ はそれぞれ x 方向変位， y 方向変位，ピッチ角の対応する時刻におけるシミュレーション結果の値であり， w は変位と角度の重要度を調整する重みである．

これら 3 つの定数の探索においては，本報では 10 進 3 桁の精度で探索を行うものとし，まず最初に初期値を決めてその位置を中心とし，限定的な大きさの半径をもつ部分空間内で全件探索を行う．そこで得られた部分空間内の最適位置に部分空間の中心を移し，また部分空間内で全件探索を行う．この操作を反復して中心位置の移動がなくなったとき，最適位置（解）が得られたとする．このアルゴリズムでは部分空間の半径を小さくとると局所解に収束する可能性が高まる恐れがあるが，局所解に陥ったと判断した場合には初期値を大きく変えて再計算させることで探索を進めていった．なお，式(7)の重みは $w=1$ とした．

3. 提案同定方法の困難さの検討

前章で述べた空気力学特性同定手法の困難さの検討のため，ピッチ角，迎角および投射角すべてが 0° となる無重力状態での水平飛翔を想定する．この場合運動方程式は 1 次元的になり式(1)で $\theta=0$ としたものになる．式(4)を考慮し，

$$a = \frac{\rho A C_D}{2m} \quad (8)$$

とおくと，式(1)で $\theta=0$ とした運動方程式は次式のようになる．

$$\dot{v} = -av^2 \quad (9)$$

初速度を v_0 とすれば，式(9)は厳密に解けて速度 v が次式のように求められる．

$$v = \frac{v_0}{av_0 t + 1} \quad (10)$$

初期変位を 0 として式(10)を積分すれば，変位 x は厳密に解けて次式のようになる．

$$x = \frac{1}{a} \ln(av_0 t + 1) \quad (11)$$

Table 2 Effect of drag during shuttlecock flight
($v_0=25\text{m/s}$, $C_D=0.6$)

Reduction of velocity v_0-v [m/s]	Distance [m]	Reduction of distance due to drag [mm]
0.5	0.0875	0.89
1.0	0.1768	3.66
1.5	0.2679	8.46
2.0	0.3611	15.48
2.5	0.4562	24.90
3.0	0.5536	36.94
3.5	0.6531	51.82
4.0	0.7550	69.82

Fig.3 Obtained drag coefficient vs. prescribed initial velocity

ここで供試シャトルを、その外形を図2に仕様と計測した物理特性を表1に示す YONEX New Official とし、初速度 $v_0=25\text{m/s}$ で水平発射されたシャトルの抗力係数 C_D が 0.6 の一定値のまま飛翔したとして、式(10),(11)を用いて、抗力による速度の減少 v_0-v とその速度減少になる飛翔距離および飛翔距離の減少を求めると表2のようになる。この表から、特定のレイノルズ数における抗力係数を精度良く求めようとして、速度減少の少ない飛翔距離から抗力係数を算出しようとした場合、著しく高い距離計測精度を必要とすることがわかる。例えば、1 m/s の速度減少の飛翔からの算出を考えると、177mm 飛翔する間に最大 3.66mm の距離差を精度よく計測することが要求される。また、この表から飛翔実験における飛翔距離も自ずと限定できる。

次に、前章で述べた提案同定方法においては実測される変位およびピッチ角から初速度および初期ピッチ角速度を推定して使うことを余儀なくされる。そこで、この推定誤差の影響を調べるため、初速度 $v_0=25\text{m/s}$ 、抗力係数 $C_D=0.6$ として、式(11)を用いて時刻 0 msec から 17.5 msec まで時間刻み 0.5msec で 36 の時刻において変位 x を求めたデータ（最終変位 0.4168m）をもとに、25m/s の近くで変化させた初速度を与えて提案方法により同定した抗力係数の結果を図3に示す。この結果からごくわずかの初速度推定の誤差が抗力係数値にかなりの影響を与えることがわかり、0.01m/s のオーダーでの初速度推定が望まれることが認識される。

提案同定方法が成功するための重要な鍵が高精度の初速度および初期ピッチ角速度の推定にあることを認識できたところで、推定方法について検討する。無視できない誤差を含む変位およびピッチ角の実測データから精度良く初速度および初期ピッチ角速度を推定する方法としては、現状では前報⁽⁹⁾⁽¹⁰⁾までに用いてきた平滑化スプライン⁽¹⁰⁾が最善であると考えられる。ここで、平滑化スプラインについて簡単に述べる。

平滑化スプラインはデータ点群 (t_i, x_i) , $i=1, 2, \dots, n$ のもつ特性を、誤差を極力排除して滑らかな曲線として求める手法であり、 $(2m-1)$ 次の自然スプライン関数を $s(t)$ 、解析対象の区間を $[t_a, t_b]$ 、平滑化パラメータを λ とすれば、求める平滑化スプラインは次式の E を最小化する関数 $\hat{s}(t)$ として与えられる。

$$E = \sum_{i=1}^n (x_i - s(t_i))^2 + \lambda \int_{t_a}^{t_b} \left(\frac{d^m s(t)}{dt^m} \right)^2 dt \quad (12)$$

この式の右辺第1項は曲線とデータ点の距離を縮める働きがあり、第2項は曲線を滑らかにする働きがある。平滑化スプラインを求める際に平滑化パラメータ λ の値が大きな役割を担うが、合理的に最適な λ を求めることはかなりの困難を伴う。なお、データ点群 (t_i, x_i) を平滑化した曲線の t に関する微分は $d\hat{s}(t)/dt$ で与えられる。

本報においては3次 ($m=2$) の自然スプラインを用いることとし、簡単な数値実験により λ を定める。先の図3の検討を行う際に用いたデータ群に、ランダムで平均値 0mm、標準偏差 0.4mm の正規分布する誤差を与えたデータ群を新たに作り、このデータ群を最適に平滑化できる λ を求めることを行った。 λ を変えて速度を平滑化した結果を図4に示す。この図より、 λ が小さい場合は誤差による速度の細かい上下動が目立ち、 λ が大きい場合は領域両端のなまり（曲線が水平になること）が目立つ。これらの欠点が緩和される λ を詳

Fig.4 Effect of smoothing parameter on velocity smoothing

Fig.5 Drag coefficient vs. Reynolds number ($\alpha=0$ deg)

細に求めたところ、 $\lambda = 0.8 \times 10^{-9}$ が妥当な値として決定できた。この値の λ を用いるにしても、初速度（あるいは初期ピッチ角速度）を推定するには左端におけるなまりの影響は無視できない。そもそも、自然スプラインを用いる限りこのなまりは避け得ないものであることも良く知られている。そこで、平滑化した速度曲線を最小2乗フィットさせた低次のべき近似関数の定数項（縦軸切片）を初速度とすることを考える。初速度を種々変えて数値実験を行ったところ、高速度域においては2次関数、低速度域においては1次関数の定数項を初速度として推定する方法が最適であると判断された。

4. シャトルの飛翔実験

供試シャトルは前章の数値実験で対象とした YONEX New Official とし、このシャトルを自作の簡易発射装置により発射させて鉛直平面内の飛翔運動を行わせ、その運動映像を鉛直平面と垂直な方向と上方向から高速度ビデオカメラで撮影する飛翔実験を行った。

横方向から撮影した2台のカメラはともに Photron FASTCAM SA3 (解像度 1024dot×1024dot のカラーで撮影) であり、上方向から撮影したカメラは Photron FASTCAM 512PCI (解像度 512dot×512dot のカラーで撮影) である。すべてのカメラは 2000 コマ/秒のフレームレートで同期させて撮影した。横方向から撮影した2台のカメラでは連続性の確保のため、同時刻でシャトル全体が撮影されているコマが必ず存在するようにした。高精度の距離計測を目指すためには極力拡大率を高め、かつ可能な限り長い距離の飛翔を撮影することが必要となる。これに、表2 (および速度を変えた同様な検討) の結果を踏まえると、3m/s 程度以下の減速の範囲で撮影するには約 0.42m の飛翔距離を 0.3mm/dot 程度のキャリブレーション値で撮影する必要があることがわかり、そのように設定した。

上方向からのカメラは、飛翔軌道がカメラの光軸と垂直な鉛直面内に収まっているか否かの判定に用い、条件に合わないと判断される飛翔映像は棄却した。さらに、上方向からのカメラ映像から飛翔平面の位置を特定し、その平面内に水平に置いた物差しを撮影してキャリブレーションを行った。

本報では初速度を変えて水平発射した5ケースと特定の初速度、初期ピッチ角およびピッチ角速度で斜め上方に発射した1ケースを、空気力学特性値を同定する対象データとした。

5. 空気力学特性値の同定結果

5・1 水平発射の場合

水平発射したごく短距離の飛翔においては重力による落下は無視できるので1次元的な運動であるとみなしている。従って、迎角が 0° の場合の抗力係数のみが同定の対象となる。飛翔実験は初速度を変えて 18 ケース程度行ったうちの $\lambda = 0.8 \times 10^{-9}$ とした平滑化スプラインにより得られた速度変化が比較的滑らかになるもののうちか

Fig.6 Variation of angle of attack after inclined projection

ら初速度の間隔を考慮して、5 ケースについて整理した。レイノルズ数と同定した抗力係数値との関係を求めた結果を図 5 に示す。飛翔中の減速度は低速度域（レイノルズ数 0.6×10^5 付近）で 1.33m/s 程度で、中速度域（レイノルズ数 1.2×10^5 付近）で 3.18m/s 程度であって、レイノルズ数算定の際の速度としてはこの速度差の中の平均速度を使用した。図 5 の結果は風洞実験による結果⁽⁵⁾⁽⁶⁾⁽⁷⁾などと比較して、抗力係数値の精度は落ちるもののレイノルズ数による変化の傾向なども概ね妥当な結果が得られており、実験精度の更なる改善を前提にすれば提案同定方法の実用可能性は示せたものとする。

5・2 斜め上方発射の場合

空気力学特性が迎角によって変化することは良く知られた事実であるのみならず、そもそもシャトルの揚力係数およびピッチングモーメント係数は迎角がある場合にのみ非零である。それ故、 0° でない特定の迎角における空気力学特性値の同定が要求される。しかし、狙った迎角をほぼ一定のまま維持するシャトルの飛翔を意図的に実現することは極めて困難であると考えられる。現状においてこの困難さを克服する手立ては見出し得ていないが、克服の糸口となることを願って斜め上方発射の飛翔軌跡から空気力学特性値を同定した結果について 1 例だけを示す。

まず、平滑化スプラインにより得られた発射の際の水平方向初速度、鉛直方向初速度、初期投射角、初期ピッチ角、初期ピッチ角速度はそれぞれ $v_{x0} = 26.72\text{m/s}$, $v_{y0} = 5.30\text{m/s}$, $\theta_0 = 11.22\text{deg}$, $\beta_0 = -0.06\text{deg}$, $\omega_0 = 100.2\text{rad/s}$ であり、飛翔中の迎角の変化は図 6 に示すとおりである。図 6 から飛翔距離 $x=0.2226\text{m}$ 以降においては迎角 α の変化はそれほど小さくなく $20.59\text{deg} \leq \alpha \leq 24.48\text{deg}$ の範囲に収まっており、その平均値は 23.28deg である。従って、この範囲の飛翔軌道からの空気力学特性値の同定を $\alpha=23.28\text{deg}$ における値とみなすものとする。なお、この範囲における速度は $25.94\text{m/s} \geq v \geq 24.47\text{m/s}$ の範囲にあってその平均値は 25.26m/s （レイノルズ数 1.05×10^5 ）である。

図 6 のように特定初期ピッチ角速度で発射されたシャトルはピッチングモーメントの働きで回転に制動がかかるが、制動のかかり初めにおける迎角の変化は比較的小さいと期待される。その際の迎角の値が発射条件によって変えられるとすれば、所望の迎角に近い運動を必要な距離だけ継続させることも期待できる。

提案同定方法を実行する際には、ピッチング回転運動の減衰係数 c の値が必要となる。飛翔中のシャトルの減衰係数 c の値を実験的に求めることは非常に難しいとされる⁽³⁾。低レイノルズ数（ $0 \sim 15380$ ）域における実測は A.Cooke⁽³⁾が行っており、 c の値として $0.55 \times 10^{-6}\text{kgm}^2/\text{s} \sim 0.68 \times 10^{-5}\text{kgm}^2/\text{s}$ を得ている。本報ではシャトルの違い、レイノルズ数の違いを考慮して、 c の値として $0\text{kgm}^2/\text{s} \sim 2.0 \times 10^{-5}\text{kgm}^2/\text{s}$ の範囲のいくつかの値を設定して、空気力学特性の値を同定した。その結果を表 3 に示す。ピッチングモーメント係数については、提案方法では $dM/d\alpha$ の値が同定されるので、その値から換算した値である。表 3 から、与えた減衰係数 c の値の範囲内では、同定された値は抗力係数では全く変化はなく、ピッチングモーメント係数ではごく

Table 3 Identified values of aerodynamic coefficients ($\alpha \approx 23.28 \text{ deg}$, $\text{Re} \approx 1.05 \times 10^5$)

Damping factor c [kgm ² /s]	Drag coefficient C_D	Lift coefficient C_L	Pitching moment coefficient C_M
$\times 10^{-5}$			
0	0.595	0.277	0.153
0.2	0.595	0.272	0.153
0.7	0.595	0.271	0.152
1.0	0.595	0.276	0.152
2.0	0.595	0.249	0.150

わずか、揚力係数ではわずかに変化するのみであること、その値は風洞実験により得られる値⁽⁵⁾⁽⁶⁾⁽⁷⁾と比較して、高精度とは言えないまでも相当程度妥当な値であることがわかる。

6. 結 言

シャトルの空気力学特性の計測を風洞実験を行うことなく、飛翔実験映像の解析データをもとにシミュレーション結果との比較により行う手法に関して、大域的で平均的な空気力学特性ではなくレイノルズ数あるいは迎角により変化する局所的な空気力学特性を計測する手法に発展させるための可能性につき調査した。まずは飛翔中に速度および迎角が変化している飛翔映像から特定の速度あるいは迎角における空気力学特性値を求めることの原理的困難さにつき検討し、初速度の推定精度を高めることが非常に重要であることを見出した。次に初速度推定の高精度化を含む困難克服のための提案を試みた。提案同定方法に従って種々の初速度で水平発射されたシャトルの飛翔映像から抗力係数を同定し、定量的にも定性的にも概ね妥当といえる結果を得た。さらに、斜め上方発射の場合についても提案同定方法に従った空気力学特性値の同定を行い、許容し得る値を得た。これらの点から、提案同定方法の実用性について可能性の糸口を提示できたものと考えられる。

文 献

- (1) 神田芳文, “シャトルcockの飛翔軌道シミュレーションのための高速度ビデオカメラによる空気力学特性の計測”, シンポジウム: スポーツ・アンド・ヒューマン・ダイナミクス 2012 講演論文集, No.12-39,(2012), pp.64-69
- (2) 神田芳文, “バドミントンのシャトルcockの大きなピッチ運動を伴う軌道シミュレーション”, シンポジウム: スポーツ・アンド・ヒューマン・ダイナミクス 2013 講演論文集, No.13-34,(2013)
- (3) A.J.Cooke, “Shuttlecock aerodynamics”, *Sports Engineering*, Vol.2, No.2, (1999), pp.85-96
- (4) A.J.Cooke, “Computer simulation of shuttlecock trajectories”, *Sports Engineering*, Vol.5, No.2, (2002), pp.93-105
- (5) C.M.Chan and J.S.Rossmann, “Badminton shuttlecock aerodynamics: synthesizing experiment and theory”, *Sports Engineering*, Vol.15, No.2, (2012), pp.61-71
- (6) 和田謙治ほか, “シャトルcock高速飛翔時の流体力学特性と流れ挙動”, シンポジウム: スポーツ・アンド・ヒューマン・ダイナミクス 2011 講演論文集, No.11-17,(2011),pp. 57-61
- (7) 中川健一ほか, “バドミントンシャトルcockのインパクト直後の空力安定性”, シンポジウム: スポーツ・アンド・ヒューマン・ダイナミクス 2013 講演論文集, No.13-34,(2013)
- (8) J.E.Goff, “A review of recent research into aerodynamics of sport projectiles”, *Sports Engineering*, Vol.16, No.3, (2013), pp.137-154
- (9) 神田芳文, “投球された野球ボールの自動画像処理によるロバストなスピン計測”, シンポジウム: スポーツ・アンド・ヒューマン・ダイナミクス 2011 講演論文集, No.11-17,(2011), pp.35-40
- (10) 菅野敬祐ほか, C によるスプライン関数 — データ解析/CG/微分方程式 —, 東京電機大学出版局, (2001)