圧縮性粘性流体の2次元流運動方程式の一処理方法(その2)

(平面板に平行な定常流の近似解)

An analyzing method for two-dimensional equation of motion on compressive-viscous flow (Part-2)

- Approximate solution of steady flow parallel to a flat plate -

(正) 高玉 績 (我孫子市在住) Isao TAKATAMA (Abikoshi, retired)

(その1)に引き続きこの具体例を考える。代表的長さを L , 無次元変数を $\xi=x/L, \eta=y/L$, 未定定数を α, β として, 合成変数 ξ と η を

$$\xi = \xi^\alpha \eta^\beta = \left(\frac{x}{L}\right)^\alpha \left(\frac{y}{L}\right)^\beta = x^\alpha y^\beta (L)^{-(\alpha+\beta)} = Z \cdot (L)^{-(\alpha+\beta)} \quad (1)$$

のように定義する。さらに $\xi = \xi^\alpha \eta^\beta$ の一般的なFourier級数⁽¹⁾

$$f(\xi) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\pi \xi^\alpha \eta^\beta) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\pi \xi^\alpha \eta^\beta) \quad (2)$$

を導入する。定常流の見かけの流れの関数 $\Psi_*(x, y)$ の微分方程式[その1の(16)式]

$$\left(\frac{\partial^2 \Psi_*}{\partial x \partial y}\right)^2 - \frac{\partial^2 \Psi_*}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \Psi_*}{\partial y^2} = 0 \quad (3)$$

において Ψ_* に代って f を代入し

$$\alpha + \beta - 1 = 0 \quad (4)$$

の条件で演算処理をすると, 既報告⁽²⁾に示したように

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial \xi \partial \eta}\right)^2 - \frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} = \frac{\xi}{\alpha(\alpha-\beta)} \frac{\partial f}{\partial \xi} \left[\frac{\beta(\beta-1)}{\eta^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2} - \frac{\alpha(\alpha-1)}{\xi^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} \right] \quad (5)$$

が得られる。上式の右辺は原形のFourier級数から派生した残留項である。そして, 後述する理由によって, 右辺は左辺に比べて無視することができ。すなわち $\Psi_*(\xi, \eta) = f(\xi, \eta)$ が成立し, f を非周期関数と考えると, $\lim_{L \rightarrow \infty} \pi/L = \Delta\delta \rightarrow 0$ と置いて(2)を集積すれば, f は周知のようにFourier積分⁽³⁾

$$f(Z) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty d\lambda f(\lambda) \cos \delta(Z-\lambda) \quad (6)$$

によって表示される。

いま無限空間において半平面板に沿って速度 U_∞ , 密度 ρ_∞ で流れる一様定常流の x, y 方向の分速度を u, v とすれば, 境界条件は

$$\left. \begin{aligned} \eta=0 (y=0) \text{において } \Psi_* = f = 0, \quad \frac{u}{U_\infty} = \frac{\partial \Psi_*}{\partial \eta} = \frac{\partial f}{\partial \eta} = 0, \quad \frac{v}{U_\infty} = -\frac{\partial \Psi_*}{\partial \xi} = -\frac{\partial f}{\partial \xi} = 0 \\ \eta=\infty (y=\infty) \text{において } \frac{u}{U_\infty} = \frac{\partial \Psi_*}{\partial \eta} = \frac{\partial f}{\partial \eta} = 1, \quad \frac{v}{U_\infty} = -\frac{\partial \Psi_*}{\partial \xi} = -\frac{\partial f}{\partial \xi} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

である。ここで新しく関数 $g(Z)$ を導入し

$$f = \eta g(Z) \quad (8)$$

と置き(6)に代入すれば, $g(Z)$ も

$$g(Z) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty d\lambda g(\lambda) \cos \delta(Z-\lambda) \quad (9)$$

というFourier積分で表示されることがなる。

一方(8)を ξ, η で微分すれば

$$\frac{\partial f}{\partial \eta} = g(Z) + \beta Z \frac{dg}{dZ}, \quad -\frac{\partial f}{\partial \xi} = -\alpha \frac{\eta}{\xi} Z \frac{dg}{dZ} \quad (10)$$

となる。従って境界条件(7)は

$$\left. \begin{aligned} Z=0 (\eta=0) \text{において } g(0)=0, \quad \left| Zg'(Z) = \frac{\eta}{\xi} Zg'(Z) \right|_{Z=0} = 0 \\ Z=\infty (\eta=\infty) \text{において } g(\infty)=1, \quad \left| Zg'(Z) = \frac{\eta}{\xi} Zg'(Z) \right|_{Z=\infty} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

と書き換えられる。

さてPrandtl-Blasiusの境界層理論⁽⁴⁾によれば, 合成変数 Z は $x^{-1/2}$ に比例するから, (4)により

$$\alpha = -\frac{1}{2}, \quad \beta = \frac{3}{2}, \quad Z = x^{-1/2} y^{3/2}, \quad y = x^{1/3} Z^{2/3} \quad (12)$$

となる。また無限空間においては代表的長さは定まらない。そこで密度を ρ_∞ , ずれ粘性係数を μ , 動粘性係数を $\nu (= \mu/\rho_\infty)$ とすれば, 長さの尺度(次元)は $\mu/\rho_\infty U_\infty = \nu/U_\infty$ と考えられる。よって(1)は

$$Z \cdot \left(\frac{\rho_\infty U_\infty}{\mu}\right) = x^{-1/2} y^{3/2} \cdot \left(\frac{U_\infty}{\nu}\right) = \xi \quad (13)$$

のように書き換えられる。

ここで議論を前に戻して, (5)式の両辺各項の大きさの程度を比較する。(8)を考慮に入れると

(5)の左辺各項の大きさの程度 $\sim \left(\frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2}\right)^2$:(5)の右辺各項の大きさの程度 $\sim \frac{1}{\eta} \left(\frac{\partial f}{\partial \eta}\right) \left(\frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2}\right) = \frac{L}{y} \left(\frac{\partial f}{\partial \eta}\right) \left(\frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2}\right)$ である。微分項はいずれも同程度の有限値と考えられるが、 L はいまの場合 $1/U_\infty$ である。空気の $1/U_\infty$ を米、秒単位で表わすと、 $1/U_\infty$ は 10^{-5} 程度、 U_∞ は 10^2 程度なので右辺は左辺に対して無視することができる。すなわち前述の仮定 $\Delta^* \equiv f$ が成立する。従って結局問題は、境界条件(11)を満足するようなFourier積分(9)の被積分関数 $g(\zeta)$ を求めることに帰着する。そこで $g(\zeta)$ が奇関数かつ非周期関数を前提にして導かれたものであることを考慮して、境界条件(11)を満足する単調増加関数を近似的に設定する。すなわち入を ζ に書き直して

$$g(\zeta) = \frac{2}{\pi} \tan^{-1} \zeta \quad (14)$$

と置くことにする。そうすると

$$\zeta \frac{dg}{d\zeta} = \frac{2}{\pi} \frac{\zeta}{1+\zeta^2}, \quad \frac{\eta}{\xi} \zeta \frac{dg}{d\zeta} = \left(\frac{\mu}{\rho_\infty U_\infty x} \right)^{2/3} \frac{2}{\pi} \frac{\zeta}{1+\zeta^2} \quad (15)$$

が得られ、境界条件(11)は(15)によって満足されていることが分かる。結局無次元パラメータ ζ による速度分布

$$\left. \begin{aligned} \frac{u}{U_\infty} &= \frac{2}{\pi} \left(\tan^{-1} \zeta + \frac{3}{2} \frac{\zeta}{1+\zeta^2} \right) \\ \frac{v}{U_\infty} &= \frac{1}{\pi} \left(\frac{\mu}{\rho_\infty U_\infty x} \right)^{2/3} \frac{\zeta^{5/3}}{1+\zeta^2} \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

が得られる。図1は進行速度 u の分布を示す。

図1 進行速度 u の分布

平板壁面近傍の密度変化は、(その1)(18)式が境界条件

$$\text{平板先端 } \xi=0, \eta=0 \text{ において } \rho(\xi, \eta) \Big|_{\xi=\eta=0} = \rho_0, \quad f(\xi, \eta) \Big|_{\xi=\eta=0} = 0 \quad (17)$$

を満足するように、(8),(14)を使って

$$\frac{\rho}{\rho_0} = 1 - f(\xi, \eta) = 1 - \frac{2}{\pi} \eta \tan^{-1} \left(\xi^{-1/2} \eta^{3/2} \right) \quad (18)$$

が導かれる。ここに ρ_0 は気体流のせき止め圧力密度、 ξ, η は

$$\xi = \left(\frac{\rho_\infty U_\infty}{\mu} \right) x, \quad \eta = \left(\frac{\rho_\infty U_\infty}{\mu} \right) y \quad (19)$$

である。

- (1) 和達三樹 : 物理のための数学, 岩波(1996).
- (2) 日本機械学会 : 北陸信越支部総会講演論文集(第43期 2006).
- (3) (1)に同じ
- (4) 巽友正 : 連続体の力学, 岩波(1999).