Equilibrium Position of Two Particles Moving in a viscous fluid inside a Cylinder

正 篠原 勝 (岐阜高専)

Masaru SHINOHARA, Gifu National College of Technology, Shinsei-cho, Motosu-gun, Gifu 501-0495

Keywords: multiphase flow, low Reynolds number, inside a cylinder, two moving particles

1. 緒言

流体の輸送機構の多くは円管であり、その中に満たされた流体中に粒子が移動するときに、粒子に働く力を調べることは興味深いことがらである。これまで、多くの研究者がこの問題に取り組んできたが、現象を支配する Navier-Stokes 方程式の非線形項を正確に扱うことが困難なので、未解明部分も多い。

我々はこれまで、円管内を進行する微小球に働く力を理論および実験的に求めてきた²⁻⁴⁾。その結果、円管内を軸方向に進行する単一粒子には中心軸に向かう横方向の力が働くことを定量的に示し、軸対称2粒子は中心軸から半径の約0.4倍の位置に向かって横移動することを明らかにした。しかし、ここに述べた半径の約0.4倍の位置は、2粒子が軸対称に制限されている場合であり、中立不安定の可能性もある。

本研究では、管内粘性流体中を任意の位置関係で進行する2粒子に働く力を調べ、平衡位置の存在可能性について吟味した。このとき、平行2平板間を進行する粒子の横移動を求めるときに P. Vasseur と R. G. Cox が用いた matched asymptotic expansions method を円筒境界に拡張して解析した。球径を基にしたレイノルズ数 Re 、及び、管径 L に対する球径 a の比 ε は十分小さいが、管径を基にしたレイノルズ数 R_L は必ずしも小さくないとした。

$$R_L = \frac{vL}{\nu} = O(1), \quad (1)$$

$$Re = \frac{va}{\nu} \ll 1, \quad (2)$$

$$\varepsilon = \frac{a}{L} \ll 1. \quad (3)$$

ここで、 ν は動粘性係数、 v は流体の速度である。

2. 基礎方程式

基礎方程式は、連続の方程式と定常ナヴィエ・ストークス方程式である。

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \quad (4)$$

$$Re(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\nabla p + \Delta \mathbf{v}. \quad (5)$$

ここで p は圧力である。円管内壁および球表面で滑り無しの条件を課し、球から遠く離れた領域で流体は静止していると考え。

粒子近傍でのみ成り立つ内部展開は

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + Re \mathbf{v}_1 + o(Re), \quad (6)$$

$$p = p_0 + Re p_1 + o(Re). \quad (7)$$

である。これを基礎方程式に代入すると、内部基礎方程式

$$\nabla \cdot \mathbf{v}_0 = 0, \quad (8)$$

$$\Delta \mathbf{v}_0 - \nabla p_0 = 0, \quad (9)$$

$$\mathbf{v}_0 = 0 \quad \text{on } r = 1, \quad (10)$$

および

$$\nabla \cdot \mathbf{v}_1 = 0, \quad (11)$$

$$\Delta \mathbf{v}_1 - \nabla p_1 = (\mathbf{v}_0 \cdot \nabla) \mathbf{v}_0, \quad (12)$$

$$\mathbf{v}_1 = 0 \quad \text{on } r = 1 \quad (13)$$

が求まる。このオーダーまでは、Vasseur and Cox¹⁾が示しているように回転の影響は現れない。

下記の無次元外部変数 $\tilde{r} = (\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$ を導入する。

$$\tilde{\mathbf{r}} = \varepsilon \mathbf{r}. \quad (14)$$

外部展開

$$\mathbf{v} = \mathbf{e}_z + \varepsilon \tilde{\mathbf{v}}_1 + O(\varepsilon^2), \quad (15)$$

$$p = \varepsilon^2 \tilde{p}_1 + O(\varepsilon^3) \quad (16)$$

を基礎方程式に代入すると、外部基礎方程式

$$\tilde{\nabla} \cdot \tilde{\mathbf{v}}_1 = 0 \quad (17)$$

$$\left(\tilde{\Delta} - R_L \frac{\partial}{\partial \tilde{z}} \right) \tilde{\mathbf{v}}_1 = \tilde{\nabla} \tilde{p}_1 \quad (18)$$

$$\tilde{\mathbf{v}}_1 \rightarrow 0 \quad \text{as } \tilde{r} \rightarrow \infty \quad (19)$$

$$\tilde{\mathbf{v}}_1 = 0 \quad \text{on the wall} \quad (20)$$

が求められる。

内部解と外部解は、それらの中間領域で等しくなければならないとして、それぞれに含まれる未定定数を定めれば、速度 v で軸方向に進行する単一球に加わる力が求められる。多粒子が沈降する場合には、これに他の粒子の2次誘導流による力、および他の粒子が引き起こした直接の1次誘導流による相互作用が加わる。

3. 結果

初め中心軸から反対方向にそれぞれ半径の0.3倍離れ、中心軸とそれぞれを結ぶ直線とが45度で交わる位置にある2粒子が、鉛直円管内を沈降するときの軌跡を示したものが

Fig. 1~5 である。鉛直、水平方向のスケールは、管径で無次元化している。Fig. 1, 2 に示すように、 RL が 6.73 までは、規則的なジグザグ運動をしていた 2 粒子が、Fig. 3, 4 に示すように、 RL がこの値を超えると軸対称性が破れ、2 粒子が円管の一方に偏った運動を始める。

Fig. 1 Positions of two settling spheres ($RL=5$)

Fig. 2 Positions of two settling spheres ($RL=6.73$)

Fig. 3 Positions of two settling spheres ($RL=6.74$)

Fig. 4 Positions of two settling spheres ($RL=8$)

RL がさらに大きくなると、Fig. 5 のように特徴的な振動を伴って沈降していた 2 粒子が、ある平衡位置に移動することがわかる。Fig. 6 に 2 粒子の平衡位置を示す。

管径を基にしたレイノルズ数がさらに大きくなると、2 粒子はより早く平衡位置に移動し、そのときの鉛直方向粒子間距離は増加し、管軸との距離は減少する。

Fig. 5 Positions of two settling spheres ($RL=8.3$)

Fig. 6 Equilibrium positions of two settling spheres ($RL=8.3$)

4. 結言

円管内を沈降する 2 微小球の運動を解析により調べた。管径を基にしたレイノルズ数が臨界値を超えると、粒子の軌跡は軸対称でなくなり、振動しながら特定の平衡位置に向かって移動することが示された。管径を基にしたレイノルズ数がさらに大きくなると、2 粒子はより早く平衡位置に移動し、そのときの鉛直方向粒子間距離は増加し、管軸との距離は減少した。

参考文献

- 1) P. Vasseur & R. G. Cox: J. Fluid Mech. 80(1977) 561.
- 2) M. Shinohara: J. Phys. Soc. Japan 61(1992) 2178.
- 3) M. Shinohara: J. Phys. Soc. Japan 61(1992) 4418.
- 4) M. Shinohara: J. Phys. Soc. Japan 65(1996) 3858.