メッシュレス法を用いた振動解析

Vibration Analysis Using a Meshless Method

○ 小川大介 (名大院) 正 神谷恵輔 (名大) 正 安田仁彦 (名大)

Daisuke OGAWA, Nagoya University, Furo-cho, Chikusa-ku, Nagoya

Keisuke KAMIYA, Nagoya University

Kimihiko YASUDA, Nagoya University

Key Words: Meshless method, Vibration analysis, Moving least square method

1. まえがき

機械、構造物等の解析手法として有限要素法 (FEM) が広く用いられている。FEM は問題とする領域のメッシュ分割に多大な時間が費やされることが問題点となっている。このため、メッシュ分割をせずに解析を行うメッシュレス法に関する研究が、近年盛んに行われている。しかし、メッシュレス法を動的問題へ応用している研究は比較的少ない。特に、変位加振や、境界条件が変位の関係式で与えられる場合の解析手法についての研究は見あたらない。本研究では、これらの問題に対する手法を提案する。

2. 基礎理論

2.1 移動最小二乗近似 本研究では移動最小二乗近似 (MLSA) に基づくメッシュレス法 [1] を取り上げる。説明の簡単のため、一次元問題を考える。問題例としては、棒の軸振動やねじり振動、はりの曲げ振動などがある。位置を表す座標を x 、時刻を t とし、対象物の変位を $u(x, t)$ とする。

位置 $x = x_i$ ($i = 1, 2, \dots, N$) に節点を配置し、各節点において節点値 $\hat{u}_i(t)$ を導入する。移動最小二乗法の考え方に従って、変位 u を

$$u(x, t) = a_1(x, t) + a_2(x, t)x + a_3(x, t)x^2 + \dots = \mathbf{a}^T(x, t)\mathbf{p}(x) \quad (1)$$

の形におく。ここに $a_j(x, t)$ は x, t の未知関数である。節点値 $\hat{u}_i(t)$ を用いて $a_j(x, t)$ を表すことを考える。このため

$$J(\mathbf{a}(x, t)) = \sum_{i=1}^N w_i(x) \left\{ \mathbf{a}^T(x, t)\mathbf{p}(x_i) - \hat{u}_i(t) \right\}^2 \quad (2)$$

で定義される評価関数 J を導入する。ここに $w_i(x)$ は、節点位置 x_i を中心にある範囲で非負であり、その範囲外では零となる適当な重み関数である。上式で与えられる J を最小にするように $a_j(x, t)$ を定める。定めた $a_j(x, t)$ を式 (1) へ代入し、整理すれば

$$u(x, t) = \boldsymbol{\phi}^T(x)\hat{\mathbf{u}}(t) \quad (3)$$

の形の式を得る。ここに $\hat{\mathbf{u}}(t)$ は節点値 $\hat{u}_i(t)$ を並べてできるベクトルである。以上の手順で定めた $u(x, t)$ は一般に、

$$u(x_i, t) \neq \hat{u}_i(t) \quad (4)$$

であることに注意されたい。

上記では節点値として変位 u のみを考えたが、これに加えて u の導関数の値を節点値とすることもできる。この方法は一般化最小二乗近似 (GMLSA) と呼ばれる [2]。

2.2 選点的境界条件の導入 式 (3) を、考えている問題の運動方程式へ代入し、ガラーキン法を適用すれば

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}\dot{\mathbf{u}} = \mathbf{f} \quad (5)$$

の形の式を得る。上式を与えられた境界条件のもとに解けば、解が求められる。しかし、MLSA あるいは GMLSA では、式 (4) からわかるように、位置 x_i における変位 $u(x_i, t)$ は節点値 $\hat{u}_i(t)$ と一致しないため、FEM のようには境界条件や拘束条件を課することができない。

境界条件や拘束条件を課するための方法としていくつかの方法が提案されている。動的な問題に対して、Ouatuatiらは特異値分解を利用することを提案している [3]。しかし、変位加振による強制振動問題や、境界条件が変位の関係式で与えられる場合には適用できない。そこで、これらの場合にも適用できる方法を以下に提案する。

境界条件を含めた拘束条件を選点的に位置 x_n で満たすことを考える。このとき、拘束条件は

$$\sum_n c_{mn} B_{mn} u(x_n, t) = \tilde{q}_m(t), \quad m = 1, 2, \dots, s \quad (6)$$

の形に書ける。ここに c_{mn} は拘束条件で定まる定数、 B_{mn} は、例えば変位拘束で $B_{mn} = 1$ 、 x 方向の角度拘束で $B_{mn} = \partial/\partial x$ となる演算子である。また $\tilde{q}_m(t)$ は変位等の指定値である。式 (3) を式 (6) に代入すれば、

$$\mathbf{C}\hat{\mathbf{u}}(t) = \tilde{\mathbf{q}}(t) \quad (7)$$

の形の式を得る。行列 $\mathbf{C}$ は特異値分解により、

$$\mathbf{C} = [\mathbf{U}_1 \quad \mathbf{U}_2] \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Delta} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{V}_1^T \\ \mathbf{V}_2^T \end{bmatrix} \quad (8)$$

と書ける。上式に現れる部分行列を用いて、式

$$\hat{\mathbf{u}}(t) = \mathbf{V}_2 \bar{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{V}_1 \boldsymbol{\Delta}^{-1} \mathbf{U}_1^T \tilde{\mathbf{q}}(t) \quad (9)$$

により未知量を $\hat{\mathbf{u}}(t)$ から $\bar{\mathbf{u}}(t)$ へ変換する。上式で与えられる $\bar{\mathbf{u}}(t)$ は拘束条件 (7) を満足する。

式 (9) で与えられる $\hat{\mathbf{u}}(t)$ を式 (5) へ代入し、左から $\mathbf{V}_2^T$ を掛ければ

$$\bar{\mathbf{M}}\ddot{\bar{\mathbf{u}}} + \bar{\mathbf{K}}\dot{\bar{\mathbf{u}}} = \bar{\mathbf{f}} \quad (10)$$

を得る。上式を解いて $\bar{\mathbf{u}}(t)$ を求め、式 (9)、式 (3) へと順次代入すれば変位を求めることができる。

3. 解析例

3.1 変位加振による強制振動問題 図1に示す密度 ρ , 断面積 A , 曲げ剛性 EI の一様な片持ちはりで自由端に変位 $u = u_0 \cos \omega t$, 傾き角 $\theta = 0$ が与えられる場合を考える。ここでは, 変位のみを未知量とする場合 (MLSA) と, 変位と傾き角を未知量とする場合 (GMLSA) の解析を行った。

Fig. 1 Cantilever subjected to displacement excitation

MLSA と GMLSA のいずれも自由度数が 12 となるようにした。 $u_0 = 1$ として, $\omega = 50 \sqrt{EI/\rho A l^2}$ での振幅分布と $x = l/3$ での共振曲線を図2に示す。境界条件はどちらの場合も指定通りになっていることがわかる。MLSA と GMLSA の比較では, 同じ自由度数でも角度を自由度として導入した場合の方が良い精度となった。

Fig. 2 Amplitude distribution and frequency response

3.2 拘束条件が変位の関係式で与えられる場合 図3に示す材料特性の異なる2つのはりが接合している場合を考える。以下では左右のはりをそれぞれ, はり A, はり B と記し, それぞれのはりの物理量は, 添え字 A, B をつけて区別する。ここでははり A とはり B を別々にメッシュレス法で定式化し, 接合部で変位と傾きが連続であるという条件で全系の支配方程式を定めることを考える。

全系の未知量を $\hat{u} = [\hat{u}_A^T \ \hat{u}_B^T]^T$ とすれば, いま考えてる問題の拘束条件は

$$\begin{bmatrix} \phi_A(0) & \phi'_A(0) & \phi_A(l_A) & \phi'_A(l_A) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\phi_B(0) & -\phi'_B(0) & \phi_B(l_B) & \phi'_B(l_B) \end{bmatrix}^T \hat{u} = 0 \quad (11)$$

と書ける。ここに肩のダッシュは x に関する微分を表す。

Fig. 3 Joined beam

ここでも MLSA と GMLSA を用いた場合の解析を行った。両者ともに, 全自由度数が 16 となるようにした。また, $\rho_B A_B / \rho_A A_A = E_B I_B / E_A I_A = 2$ とした。求めた固有振動数を表1に示す。この表には比較のため, 分割数を 30 とした場合の FEM で解析した結果をあわせて示してある。この場合でも, GMLSA を用いた場合の方が精度の良い結果が得られた。

Table 1 Natural frequencies

mode	$\omega / (\sqrt{E_A I_A / \rho_A A_A l_A^2})$				
	1	2	3	4	5
FEM	5.463	15.650	29.903	50.382	74.132
GMLSA	5.463	15.650	29.904	50.386	74.173
MLSA	5.478	15.849	30.431	52.316	77.402

紙面の都合上, 本文中では示していないが, 境界条件や自由度数を変え, GMLSA と MLSA を用いた場合を比較した。単純支持のように変位のみ拘束の場合は, 両者の違いは小さいが, 固定端のように傾き角まで拘束する必要がある場合には, 本報告で示した2つの例のように GMLSA を用いた場合の方が精度の良い結果が得られた。

4. まとめ

本報告ではメッシュレス法を用いて, 強制変位応答の解析や, 拘束条件が未知量の関係式で与えられる場合の解析手法を提案した。提案した方法の有効性を数値例によって示した。また MLSA と GMLSA を用いた場合の解析精度の比較を行った。その結果, 提案した手法で角度拘束を扱う場合には GMLSA を用いることで良好な結果が得られることがわかった。

文献

- (1) T. Belytschko, Y. Lu and L. Gu "Int. J. Numer. Meth. Engng.", 37, (1994), pp.229-256
- (2) S. Atluri, H. Kim and J. Cho, "Comput. Mech.", 24, (1999), pp.334-347
- (3) A. Ouattouati and D. Johnson, "Int. J. Numer. Meth. Engng.", 46, (1999), pp.1-27