波形座金の変形特性解析

Analysis of Large Deformations of Coiled Wave Spring

正 大槻 敦巳 (名城大理工) 〇学 青木 功 (名城大理工 院)

Atsumi OHTSUKI, Meijo University, 1-chome 501-banchi, Shiogamaguchi, Tempaku-ku, Nagoya, Aichi 468-8502, Japan

Isao AOKI, Graduate student of Meijo University

Key Words: Elasticity, Large Deflection, Non-Linear Problem, Elastica Problem, Coiled Wave Spring

1. 緒言 近年, Fig.1 に示す波形座金 (コイルドウェーブスプリング) が管接合部のシールや自動車のスリックラッチなどに使われているが, このばね非線形ばね特性は未だ十分解明されていない^{1)~4)}. そこで, 本論文は, 波形座金の変形挙動を理論的に解析したもので, だ円積分を用いた解析解を与えると同時に, ばね特性に与える弧状中心角の影響や負荷部位の摩擦の影響を明らかにした.

2. 基礎理論 Fig.2 に示すように, 波状形状を円弧にモデル化した波形座金 (負荷前の原形は A'-B'-D' で 1 ピッチの半長を L で表す) に圧縮荷重 P を作用させる. 座標原点を A とし, 水平距離, 鉛直変位に x, y をとり, たわみ曲線の弧長を s , たわみ角を θ , 曲率を $1/R$, ヤング率を E , 断面二次モーメントを I , 曲げモーメントを M , 波形の中心角を ψ , 摩擦係数を μ , 摩擦力 Q をとすると

$$1/R = -d\theta/ds, \quad M/(EI) = -(d\theta/ds - 1/R_0) \quad (1)$$

$$dx = ds \cdot \cos\theta, \quad dy = ds \cdot \sin\theta \quad (2)$$

ばねの任意点 $C(x, y)$ に作用する曲げモーメント M は

$$M = -Px + Qy + M_A \quad (3)$$

ここで, 次の無次元量

$$\left. \begin{aligned} \xi = x/L, \quad \eta = y/L, \quad \zeta = s/L, \quad \rho = R/L \\ \gamma_v = PL^2/(EI), \quad \gamma_h = QL^2/(EI), \quad \alpha = M_AL/(EI) \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

を用いれば, たわみの基礎式は

$$d\theta/d\zeta = \pm \sqrt{\tau \sqrt{\sin(\theta + \beta) + \{(\alpha - 1/\rho_0)^2 - 2\gamma_h\}/\tau}} \quad (5)$$

ただし, $\tau = 2\sqrt{\gamma_h^2 + \gamma_v^2}$, $\sin\beta = 2\gamma_h/\tau$, $\cos\beta = 2\gamma_v/\tau$

さらに, 新しい角度変数 ϕ, k

$$\left. \begin{aligned} \sin(\theta + \beta) = 1 - 2k^2 \sin^2 \phi \\ \{(\alpha - 1/\rho_0)^2 - 2\gamma_h\}/\tau = 2k^2 - 1 \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

を導入すれば, 微小量 $d\theta, d\zeta, d\xi, d\eta$ (複号同順) は

$$d\theta = \mp \left(2k \cos\phi / \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \phi} \right) d\phi \quad (7)$$

$$d\zeta = \mp \sqrt{2/\tau} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \phi} d\phi \quad (8)$$

$$d\xi = \mp \left\{ 2\sqrt{2}/(\tau\sqrt{\tau}) \left[\begin{aligned} &2\gamma_h \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \phi} - \gamma_v / \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \phi} \\ &+ 2k\gamma_v \sin\phi \end{aligned} \right] d\phi \right. \quad (9)$$

Fig.1 Coiled wave spring.

$$d\eta = \mp \left\{ 2\sqrt{2}/(\tau\sqrt{\tau}) \left[\begin{aligned} &2\gamma_v \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \phi} - \gamma_h / \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \phi} \\ &- 2k\gamma_h \sin\phi \end{aligned} \right] d\phi \right. \quad (10)$$

式(8)~(10)において正負符号 ($\pm$) を考慮し, 角度変数 $\phi_A \sim \phi$ [実角度 $(\theta_A + \beta_A) \sim (\theta + \beta)$ に対応] にわたって積分すれば, 任意点 $C(x, y)$ までの無次元弧長 ζ , 無次元水平距離 ξ , 無次元たわみ η が求まる. ここでは, 変形の対称性を考慮し, 解析は区間 AB (区間 BD と対称, 点 B および B' は変曲点) についてのみ示すこととする. なお, 関数 $F(k, \phi)$, $E(k, \phi)$ はそれぞれ Legendre-Jacobi のだ円積分第一種および第二種を表す.

区間 AB ($\phi_B \leq \phi \leq \phi_A$) に対しては, 最終的に次式(11)~(13)が得られる.

$$\zeta = (\sqrt{2}/\sqrt{\tau}) \{F(k, \phi_A) - F(k, \phi)\} \quad (11)$$

$$\xi = \left\{ 2\sqrt{2}/(\tau/\sqrt{\tau}) \right\} \left[\begin{aligned} &2\gamma_h \{E(k, \phi_A) - E(k, \phi)\} \\ &- \gamma_v \{F(k, \phi_A) - F(k, \phi)\} \\ &- 2k\gamma_v (\cos\phi_A - \cos\phi) \end{aligned} \right] \quad (12)$$

$$\eta = \left\{ 2\sqrt{2}/(\tau\sqrt{\tau}) \right\} \left[\begin{aligned} &2\gamma_v \{E(k, \phi_A) - E(k, \phi)\} \\ &- \gamma_h \{F(k, \phi_A) - F(k, \phi)\} \\ &+ 2k\gamma_h (\cos\phi_A - \cos\phi) \end{aligned} \right] \quad (13)$$

ところで, $\zeta = s/L = 2\psi/\pi$ (すなわち $\zeta_{AB} = \psi/\pi$) なる条件を考慮すれば, γ_v と k の間には次の関係が成り立つ.

$$(\sqrt{2}/\sqrt{\tau}) \{F(k, \phi_A) - F(k, \phi)\} = \psi/\pi \quad (14)$$

また, 初期曲率 ρ_0 と中心角 ψ の関係は R_0 と L の関係より

$$\rho_0 = 1/\pi \quad (15)$$

また, 摩擦係数 μ より γ_v と γ_h の関係は

$$\gamma_h = \mu \gamma_v \quad (16)$$

一方, 式(1)および式(4)~(6)より, 任意点 $C(x, y)$ における無次元曲げモーメント α は

$$\alpha = \sqrt{2\tau} k \sqrt{1 - \sin^2 \phi} + 1/\rho_0 \quad (17)$$

Fig.2 Schematic configuration of wave spring subjected to compressive and frictional forces.

Fig.3 Relationship between non-dimensional deflection η_d and non-dimensional compressive force γ_v .

Fig.4 Relationship between non-dimensional spring constant κ_d and non-dimensional compressive force γ_v .

したがって、無次元最大曲げモーメント α_{max} は、 $\theta=0$ となる位置に生じる。すなわち

$$\alpha_{max} = \alpha_A \quad \dots \dots \dots (18)$$

同様に、任意点 $C(x, y)$ における無次元曲率 $1/\rho_0$ は

$$1/\rho_0 = -\sqrt{2\tau}k\sqrt{1-\sin^2\phi} \quad \dots \dots \dots (19)$$

さらに、波形座金のばね特性として、ここでは無次元ばね定数を次のように定義する。

$$\kappa_d = \frac{\gamma_v}{\eta_d} = \frac{PL^2/(EI)}{(y_B - y_B)/L} = \left\{ \frac{P}{(y_B - y_B)} \right\} \left(\frac{L^3}{EI} \right) \\ = \gamma_v / \left(\left[\frac{1 - \cos\psi}{\pi} - \frac{2\sqrt{2}}{\tau\sqrt{\tau}} \left[\frac{2\gamma_v \{E(k, \phi_A) - E(k, \phi_B)\}}{-\gamma_v \{F(k, \phi_A) - F(k, \phi_B)\}} + 2k\gamma_h (\cos\phi_A - \cos\phi_B) \right] \right] \right) \quad (20)$$

3. 理論解析および測定例 Fig.3 は、中心角 $\psi=90^\circ, 60^\circ, 45^\circ, 30^\circ$ の各値に対する無次元荷重 γ_v と変曲点 B における無次元たわみ η_d の関係を表したもので、 ψ が小さいほど γ_v は大きくなり（負荷範囲の増加）、 γ_v が増すにつれてたわみ η_d が増大する傾向となる。また $\gamma_v - \xi_\kappa$ 関係は、曲線の変化（非線形傾向）を示している。

Fig.4 は、無次元ばね定数 κ_d (y 方向たわみに関連) を示したもので、 γ_v が増せば κ_d が減少する特性を示すことが分かる。

Fig.5 Some examples of deformed state.
($\psi=90^\circ, 60^\circ, 45^\circ, 30^\circ$)

Fig.5 は、種々の無次元荷重 γ_v に対する変形状態について示したもので、負荷に伴う波形座金（モデル）の変形状態および変形の進行状況が視覚的に良く分かる。

4. むすび 波形座金の変形特性（ばね特性）を理論的に解析した結果、次の諸点が明らかになった。

- (1) 弧状中心角 ψ によりばね特性が変わる。
- (2) 弧状中心角 ψ が小さいほど無次元荷重 γ_v は大きくなる。
- (3) $\gamma_v - \xi_\kappa$, $\gamma_v - \eta_d$, $\gamma_v - \kappa_d$ 関係はいずれも曲線的な変化傾向を示す。
- (4) ばね定数 κ_d は非線形性を示す。

参考文献

- (1) Smalley Steel Ring Co. Catalog No. WS-93
- (2) 西尾康宏・渡辺浩太郎・久納孝彦, コイルドウェーブスプリングのばね特性と応力, ばね論文集, 47(2002), 15-20.
- (3) 大槻敦己・青木功, コイルドウェーブスプリングの大変形解析, 機械学会講演論文集, No.025-2(2002), 165-166
- (4) 大槻敦己・青木功, 大変形理論に基づくコイルドウェーブスプリングの変形特性解析, ばね技術研究会秋季講演論文集, (2002), 9-12.