ノッチフィルタを用いたサーボ系設計手法と 柔軟アームの位置決め制御への応用

Design of Servo Systems Based on Notch Filter and Its Application to Positioning Control of Flexible Arm

○ 直江 芳樹 (名工大) 正 森 貴彦 (岐阜高専) 不破 勝彦 (名工大)
神藤 久 (名工大)

Yoshiki NAOE, Nagoya Institute of Technology, Gokisocho, Showa-ku, Nagoya, Aichi

Takahiko MORI, Gifu National College of Technology

Katsuhiko FUWA, Nagoya Institute of Technology

Hisashi KANDO, Nagoya Institute of Technology

Key Words : Notch Filter, Servo System, Flexible Arm, Positioning Control

1 はじめに

筆者らは先に、森田らが提案した周波数依存型最適サーボ系⁽¹⁾の構造を踏まえ、前置フィルタの特性劣化を改善し、制振制と過渡特性の向上を目的とするノッチフィルタを用いたサーボ系設計手法を提案した⁽²⁾。具体的には、状態フィードバックループと積分器ループにおいて、所望のノッチフィルタの構造を与え、閉ループ極の配置とは無関係に、実現される前置フィルタの極を所望のものに配置した。しかし、ノッチフィルタを用いる場合、フィードバックゲインを求める連立方程式が不能になる問題が起こり、筆者らが用いた最小2乗近似解のなかの最小ノルムをもつものでは、厳密な極配置が困難であった。

そこで、本稿では、上記の問題を解決し、極配置が厳密に指定できる様な設計手法を提案する。

2 ノッチフィルタを用いたサーボ系の設計

Fig.1 Block diagram of proposed control system

Fig.1 に提案するサーボ系のブロック線図を示す. 制御対象 $P(s)$ の状態空間モデルを次のように与える.

$$\begin{cases} \dot{x}_r(t) = \bar{A}_r x_r(t) + \bar{B}_r u(t) \\ y_r(t) = \bar{C}_r x_r(t) \end{cases} \quad (1)$$

ただし、状態変数、制御入力、そして制御量は各々 $x_r(t) \in R^n$, $u(t) \in R$, $y_r(t) \in R$ とする. また各係数行列は

$$\bar{A}_r = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \\ -a_{r1} & -a_{r2} & \cdots & -a_{r,n} \end{bmatrix}, \bar{B}_r = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$\bar{C}_r = [c_{r1} \quad c_{r2} \quad \cdots \quad c_{r,n}]$$

として記述され, $(\bar{C}_r, \bar{A}_r)$ は可観測対, 制御対象の伝達関数は原点に零点を持たないとする.

つぎに、所望のノッチフィルタの状態空間モデルを、

$$\begin{cases} \dot{x}_F(t) = A_F x_F(t) + B_F v(t) \\ u(t) = C_F x_F(t) + D_F v(t) \end{cases} \quad (2)$$

とする. ただし, $x_F(t) \in R^2$, $v(t) \in R$, また各係数行列は

$$A_F = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & -2\zeta_0\omega_0 \end{bmatrix}, B_F = \begin{bmatrix} 0 \\ \omega_0^2 \end{bmatrix}, \\ C_F = \begin{bmatrix} 0 & \frac{2}{\omega_0}(\zeta_1 - \zeta_0) \end{bmatrix}, D_F = 1$$

として記述する. また, $\omega_0(>0)$ はノッチフィルタの中心角周波数, $\zeta_0(>0)$, $\zeta_1(>0)$ は共にノッチフィルタの減衰係数である. 制御量 $y_r(t)$ と目標ステップ入力 $r(t)$ との偏差を $e(t) = y_r(t) - r(t)$ として, 以下のような拡大系を構成する.

$$\begin{aligned} & \begin{cases} \dot{x}_{sv}(t) = A_{sv}x_{sv}(t) + B_{sv}v(t) \\ y_{sv}(t) = C_{sv}x_{sv}(t) \end{cases} \quad (3) \\ x_{sv}(t) &:= \begin{bmatrix} \dot{x}_r(t)^T & \dot{x}_F(t)^T & e(t)^T \end{bmatrix}^T \\ A_{sv} &= \begin{bmatrix} \bar{A}_r & \bar{B}_r C_F & O_{n \times 1} \\ O_{2 \times n} & A_F & O_{2 \times 1} \\ \bar{C}_r & O_{1 \times 2} & 0 \end{bmatrix}, \\ B_{sv} &= \begin{bmatrix} \bar{B}_r D_F \\ B_F \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C_{sv} = \begin{bmatrix} \bar{C}_r & O_{1 \times 2} & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

ただし, (A_{sv}, B_{sv}) は可制御対であるとする. さて, サーボ系としては状態フィードバック制御則

$$v(t) = -Kx_{sv}v(t) \quad (4)$$

$$K = \begin{bmatrix} k_1^R & k_2^R & \dots & k_n^R & | & k_1^F & k_2^F & | & k^I \end{bmatrix} \quad (5)$$

により、閉ループ極の極配置が可能となる。しかし、ノッチフィルタの特性は $k_j^2 (j = 1, 2)$ により変化し、主共振モードが除去できない問題が生じる。そこで、所望の周波数特性が実現されるような極配置を考える。

3 閉ループ系の解と係数の関係

2章の問題を解決するため、(5)式において、予め $k_j^F (j=1, 2) = 0$ とし、フィードバックゲインによるノッチフィルタの特性劣化を防ぐ。このとき、 $A_{sn} - B_{sn}K$ の特性多項式は

$$\det(sI_{n+3} - A_{sv} + B_{sv}K) = s^{n+3} + \sum_{l=1}^{n+3} \alpha_{l-1} s^{l-1} \quad (6)$$

$$\begin{aligned}\alpha_i &= (\omega_0^2 c_{r,i+1} + 2\omega_0 \zeta_1 c_{r,i} + c_{r,i-1}) k^I + a_{r,i-2} \\ &\quad + k_{i-2}^R + 2\omega_0 (\zeta_0 a_{r,i-1} + \zeta_1 k_{i-1}^R) + \omega_0^2 (a_{r,i} + k_i^R), \\ a_{r,j} &= 0 \quad (j \leq 0, n+2 \leq j), \quad a_{r,j} = 1 \quad (j = n+1), \\ k_j^R &= 0 \quad (j \leq 0, n+1 \leq j), \quad c_{r,j} = 0 \quad (j \leq 0, n+1 \leq j)\end{aligned}$$

である。ここで、極配置条件を考える。所望のノッチフィルタの極を配置するための状態フィードバックゲインが $k_j^F (j = 1, 2) = 0$ として与えられているので、二つの閉ループ極 λ_1, λ_2 が安定となる必要がある。そこで、所望の特性多項式を

$$s^{n+3} + \sum_{l=1}^{n+3} \gamma_{l-1} s^{l-1} = (s + \lambda_1)(s + \lambda_2)(s^{n+1} + \beta_n s^n + \cdots + \beta_1 s + \beta_0) \quad (7)$$

とし、残りの未知変数 $k_1^R \cdots k_n^R, k^I$ との関係式を求める。(6) 式の係数 $\alpha_i (i = 0, 1, \dots, n)$ と係数比較すると以下のような関係式が成り立つ。

$$\begin{aligned}\Sigma_{al} K_{al} &= \gamma'_{al} \quad (8) \\ \Sigma_{al} &= \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & \eta_0 \\ \omega_0^2 & 0 & & \eta_1 \\ 2\omega_0 \zeta_1 & \omega_0^2 & & \vdots \\ 1 & 2\omega_0 \zeta_1 & \ddots & 0 \\ O & \ddots & \ddots & \omega_0^2 \\ & & & 2\omega_0 \zeta_1 \\ & & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta_0 \\ \eta_1 \\ \vdots \\ \eta_i \\ \vdots \\ \eta_{n+1} \\ \eta_{n+2} \end{bmatrix} \\ \eta_i &= \omega_0^2 c_{r,i+1} + 2\omega_0 \zeta_1 c_{r,i} + c_{r,i-1}, \\ K_{al} &:= [k_1^R \quad k_2^R \quad \cdots \quad k_n^R \quad k^I]^T, \\ \gamma'_{al} &:= [\gamma'_0 \quad \gamma'_1 \quad \cdots \quad \gamma'_i \quad \cdots \quad \gamma'_{n+1} \quad \gamma'_{n+2}]^T, \\ \gamma'_i &= \gamma_i - a_{r,i-2} - 2\omega_0 \zeta_0 a_{r,n-1} - \omega_0^2 a_{r,n}, \\ \gamma_i &= \beta_i \lambda_1 \lambda_2 + \beta_{i-1} (\lambda_1 + \lambda_2) + \beta_{i-2}.\end{aligned}$$

いま (8) 式において未知変数 $n+1$ 個に対し、一般には方程式が $n+3$ 個あるため、この連立方程式の解は不能である。そこで Σ_{al} の 2, 3 行を行変換により零行列にし、拡大係数行列の階数と Σ_{al} の階数を合わせることで連立方程式が解をもつようにする。その際の必要十分条件は $\gamma'_1, \gamma'_2 = 0$ である。その結果、(8) 式は以下になる。

$$\begin{aligned}\Sigma'_{al} K_{al} &= \gamma''_{al} \quad (9) \\ \Sigma'_{al} &= \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & c_{r,1} \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & c_{r,2} \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ & O & 1 & c_{r,n} \\ & & & 1 \end{bmatrix}, \\ \gamma''_{al} &:= [\gamma''_0 \quad \gamma''_1 \quad \cdots \quad \gamma''_i \quad \cdots \quad \gamma''_{n+1} \quad \gamma''_{n+2}]^T, \\ \gamma''_0 &= \gamma'_0 / \omega_0^2, \\ \gamma''_1 &= \gamma'_1 - \omega_0^2 \gamma''_{i+2} - 2\omega_0 \zeta_1 \gamma''_0, \\ \gamma''_2 &= \gamma'_2 - 2\omega_0 \zeta_1 \gamma''_{i+1} - \omega_0^2 \gamma''_{i+2} - \gamma''_0, \\ \gamma''_i &= \gamma'_i - 2\omega_0 \zeta_1 \gamma''_{i+1} - \omega_0^2 \gamma''_{i+2} \quad (i = 2, \dots, n+2).\end{aligned}$$

(9) 式を解くと、 K_{al} の各ゲインは

$$k_i^R = \gamma''_{i+2} - \frac{c_{r,i+1}}{c_{r,1}} \gamma''_0 \quad (i = 1 \cdots n), \quad k^I = \frac{\gamma''_0}{c_{r,1}} \quad (10)$$

のように表せる。これにより、フィードバックゲインと所望のノッチフィルタの特性を表すパラメータである $(\omega_0, \zeta_0, \zeta_1)$ との関係を示すことができる。ここで λ_1, λ_2 の条件を考える。 $\gamma''_1, \gamma''_2 = 0$ より、それぞれ $\lambda_1 + \lambda_2, \lambda_1 \lambda_2$ についてまとめると

$$\begin{cases} g_1(\lambda_1 + \lambda_2) + g_2(\lambda_1 \lambda_2) = g_3 \\ g_4(\lambda_1 + \lambda_2) + g_5(\lambda_1 \lambda_2) = g_6 \end{cases} \quad (11)$$

である。ただし、 $g_1 \cdots g_6$ は制御対象、ノッチフィルタのパラメータ、 $n+1$ 個の閉ループ極により構成される。(11) 式において、 $g_1 g_5 - g_4 g_2 \neq 0$ の下で、 λ_1, λ_2 は以下のようになる。

$$\lambda_1 + \lambda_2 = \frac{g_5 g_3 - g_2 g_6}{g_1 g_5 - g_4 g_2}, \quad \lambda_1 \lambda_2 = \frac{-g_4 g_3 + g_1 g_6}{g_1 g_5 - g_4 g_2} \quad (12)$$

4 設計手順

設計手順を以下に示す。

1. 所望のフィルタパラメータ $\omega_0, \zeta_0, \zeta_1$ を与える。
2. 制約付準ニュートンアルゴリズムを用いて、 $n+1$ 個の安定な閉ループ極を与え、 $\beta_0 \cdots \beta_n$ を計算し、(12) 式より λ_1, λ_2 を求める。
3. 閉ループ極が所望の範囲に入らなければ手順 2 に戻る。
4. (10) 式により、 $k_1^R \cdots k_n^R, k^I$ を求める。

5 柔軟アームの位置決め制御への応用

Fig.2 Model of one-link flexible arm

Fig.2 に示す直動型 1 リンク・フレキシブル・アームをモデルとする。ただし、フレキシブルアームは Bernoulli-Euler 梁であると仮定する。さらに、根元はハブで固定され、先端には荷重を有し、台車の位置のみ測定可能とする。設計モデルには、剛体モードのみを考慮した線形な 1 入力 1 出力の運動方程式を用いる。物理パラメータについては文献 (2) を参照されたい。

6 おわりに

本稿では、ノッチフィルタを用いたサーボ系設計において、フィードバックゲインを求める連立方程式の解が不能となる問題を解決し、厳密に極配置が可能となる設計手法を提案した。なお、シミュレーション結果などについては当日発表する。

文献

- (1) 森田良文, 他, “周波数依存型最適サーボ系によるフレキシブル倒立振子の位置決め制御”, 日本機械学会論文集 (C 編), Vol.65, No.633, pp.1816-1822 (1999)
- (2) 森貴彦, 他, “ノッチフィルタを用いた最適サーボ系による柔軟構造物の振動制御”, 計測自動制御学会論文集, Vol.44, No.7, pp.611-613 (2008)