弾性ロッドの強制振動 — 実験とシミュレーション —

Nonlinear Oscillation of a Driven Damped Elastic Rod —Experiment and Simulation—

○ 稲垣 慎也 (三重大院) 須藤 知香 (三重大) 原田 勇作 (三重大)
 國仲 寛人 (三重大) 牧原 義一 (三重大)

Shinya INAGAKI, Chika SUDO, Yusaku HARADA, Hiroto KUNINAKA, Yoshikazu MAKIHARA
 Course of Science Education, Faculty of Education, Mie University, 1557 Kurimamachiya-cho, Tsu, 514-8507 Japan

Key Words: Nonlinear Oscillation, Elastic Rod, Resonance, Experiment of Oscillation, Simulation

1. 背景

これまで、倒立振り子や構造物の強制振動下での振動特性については、倒立ゴム振り子の強制振動実験と動吸収振器への応用に関する研究⁽¹⁾や、倒立振り子型構造を有する構造物の地震動に対する振動特性の研究⁽²⁾等が行われている。また近年では、長周期地震動下での構造物の大きな揺れが注目され、強制振動下での巨大建造物の振動特性に関する基礎研究が重要となっている。

本研究では、我々のグループが行った「強制球面振り子」の研究⁽³⁾を参考にして、先端におもりを付けた弾性ロッドの長周期強制振動に関する実験とシミュレーションによる計測と解析を行った。その中で、ロッドの複雑な振動状態を視覚化して、非線形振動の様子と長周期振動のメカニズムを明らかにすることを試みた。

2. 研究方法

2-1 強制振動実験

本実験で使用した実験装置を Fig. 1 に示す。加振装置は、交流モーターにプーリー、クランク、スライドシャフトを取り付けたものであり、モーターの回転運動を水平往復運動に変換する。モーターの回転数は、約 3% の分解能で設定・制御した。また、反射テープを貼ったおもりを取り付けた弾性ロッドをスライドシャフトの先端に固定した。そして、天井に設置したハイスピードカメラで撮影した 1/100 秒ごとのおもりの位置を、画像処理システム (ラインレコーダー LRH1200X-1・(株) デジモ) により検出し、床面に投影したロッドの軌道を計測した。本実験では、ロッドの長さやおもりの大きさ、質量等を変化させたいくつかのロッドについて、モーターの回転数をパラメータとしておもりの軌道 (射影軌道) を視覚化し、軌道の形や大きさの強制角振動数 (ω) 依存性を調べた。

Fig.1 Experimental apparatus

2-2 シミュレーション

実験結果を再現するようなシミュレーターの構築を行った。ロッド先端のおもりの運動方程式は次のように表される。

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = - \left(6\pi\eta R + \frac{\pi}{2} C_d R^2 \rho |V| \right) \mathbf{V} - m\mathbf{g} + \mathbf{T} - m\mathbf{b} - \mathbf{F}_{el} \quad (1)$$

おもりの重心位置を $\mathbf{r}$ とし、Fig. 2 のように強制振動方向を y 軸にとった。 $m, \eta, R, C_d, V, \mathbf{g}, \mathbf{T}, -m\mathbf{b}$ は、それぞれおもりの質量、空気粘度、おもりの半径、抵抗係数、おもりの速度、重力加速度、弾性ロッドの抗力、おもりに働く慣性力である⁽³⁾。おもりに働く弾性ロッドの復元力 $\mathbf{F}_{el}$ は、次のように表すことができる。

$$\mathbf{F}_{el} = F_{xy}\mathbf{e}_r + F_z\mathbf{e}_z \quad (2)$$

ここで非線形復元力を $F_{xy} = 3EId/L^3 + 3EId^3/L^5$, $F_z = F_{xy} \tan \varphi$ と仮定した。 F_{xy} は z 軸に垂直方向にかかる力の大きさであり、 F_z は z 軸方向にかかる力の大きさである。式中の d はおもりから z 軸までの距離、 φ はロッドと z 軸のなす角、 E, I, L は、それぞれロッドのヤング率、断面二次モーメント、長さである。また、 $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_z$ は、それぞれおもりから z 軸方向、および z 軸方向の単位ベクトルである。

式(1)を極座標変換し、さらに長さのスケールを L 、重さのスケールを m で無次元化した方程式を、4 次のルンゲ・クッタ法を用いて時間刻み $dt = 0.001s$ 程度で数値積分を行った。また、過激な軌道を排除するため、計算をスタートして約 6 時間経過後に約 8 時間の軌道を計算した。

Fig.2 Restoring force and the coordinates

3 結果および考察

3-1 強制振動実験

長さ 70.1cm、半径 0.500mm の鋼鉄製のロッドの先端に半径 19.9mm、質量 2.80g のおもりの取り付けた弾性ロッドについて、 ω を増加させたときの測定結果を Fig. 3, 4 に示す。

Fig. 3 は特徴的な射影軌道の変化を示したものである。強制振動は y 軸方向に加えた。図中の各軌道に対応する ω [rad/s] の値は、それぞれ ① 0.750, ② 1.500, ③ 1.833, ④ 1.866 であり、対応する周期 T [s] は ① 8.380 ~ ④ 3.367 へと変化する。ほぼすべての ω で楕円軌道が得られるが、軌道の大きさや向きは大きく変化した。

Fig. 4 は、得られた楕円軌道の短軸の 1/2 の長さ A と長軸の 1/2 の長さ B をそれぞれ A, B とし、 x 軸と長軸のなす角を θ [rad] としたときの、 A, B, θ の ω の依存性を示したものである。 ω が増加すると、②において A が最大となり、さらに③で B が最大となり、そして④で A, B が急激に減少した。また挿入図に示すように、①においても軌道の大きさが極大値を示した。①では ω の値が②の半分となっており、強制振動 1 周期の間におもりが 2 回振動する倍周期振動と思われる軌

道が現れた。一方、 θ は②で大きく減少し、③以上ではほぼ一定となった。講演では、ロッドの長さ、およびおもりの半径を変化させたときの実験結果についても報告する。

Fig.3 Trajectories projected on the x-y plane

Fig.4 Relations between ω and A, B, θ of the trajectories

3-2 シミュレーション

本研究で構築したシミュレーターでは、実験と同じパラメータを使用した。Fig. 5におもりのxy平面への射影軌道を、Fig. 6に(b), (c)に対応するストロボプロットを示す。ストロボプロットとは強制振動1周期ごとのおもりの位置をプロットしたものである。それぞれの ω [rad/s]の値は(a)8.00, (b)8.05, (c)8.15, (d)8.35である。(a)はプラナー軌道、(b)はカオス軌道、(c)は準周期軌道、(d)は周期的な楕円軌道を示した。一方、ストロボプロットでは、(b)は対称的な濃淡のパターンを、c)は閉じた曲線を示した。

3-3 実験とシミュレーションの比較

実験とシミュレーションの両方において、強制角振動数を変化させると、軌道の形がプラナーからプラナー以外の軌道に変化し、振幅が増大した共振状態が観測された。また、それぞれの強制角振動数は、実験($\omega=1\sim 2$ rad/s)とシミュレーション($\omega=8\sim 9$ rad/s)では大きく異なった。一方、シミュレーションではプラナー軌道、カオス軌道、準周期軌道、周期軌道という多様な軌道が観測されたが、実験では一部を除いてプラナー軌道、楕円軌道のみが観測された。この原因として、(1)シミュレーションにおける非線形力の妥当性、およびロッドが撓まないとして計算を行っていること、(2)実験における ω の精度及び微小振動の効果等が考えられる。

Fig.5 Trajectories at several forced angular frequencies

Fig.6 Strobe plots (e) and (f) derived from (b) and (c), respectively

4 まとめ

本研究では周期的振動を加えた弾性ロッドの振動を、実験とシミュレーションにより調べた。得られた結果を以下に示す。

- (1) 実験において強制角振動数 ω を変化させると、ロッド先端のおもりの軌道はプラナー軌道から楕円軌道へと変化し、共振点付近ではその大きさが急激に増大し、楕円の向きも大きく変化した。
- (2) シミュレーションでは、共振点付近でプラナー軌道や楕円軌道以外に、準周期軌道およびカオス軌道が観測された。
- (3) 実験とシミュレーションにおける軌道（共振状態）の違いは、シミュレーションにおける非線形力の妥当性や、実験における ω の精度等に起因するものと推察される。これらについては、今後の改良が必要である。

本研究は平成23年度 JST A-STEP および平成24年度三重大学・中部電力産学連携事業における受託研究として実施された。

参考文献

- (1) 尾崎晃一, 檜山達雄, “倒立ゴム振り子の振動解析と動吸収器への応用”, 日本機械学会論文集 (C), 68, 1679-1684, (2002).
- (2) G.W. Housner, “The Behavior of Inverted Pendulum Structures During Earthquakes”, Bulletin of the Seismological Society of America, 53, No. 2, 403-417, (1963).
- (3) 牧原義一, 太田成俊, 森信之, “強制球面振り子によるカオスの実験”, 大学の物理教育, 10, 91-94 (2004).