強制外力を加えた一様磁場下の一様性MHD乱流の直接数値解析

Direct Numerical Simulation for Homogeneous MHD Turbulence under External Force and Uniform Magnetic Field

○正 岡本 正芳 (静大院)

Masayoshi OKAMOTO, Shizuoka University, 3-5-1 Johoku, Naka-ku, Hamamatsu, 432-85611, Japan

Key Words: MHD, Turbulence, Direct Numerical Simulation, Uniform Magnetic Field, External Forces, Energy Transformation

1. 緒言

電離気体であるプラズマを連続体として取り扱う電磁流体近似(MHD)の支配方程式では速度場の非線形性に加え、さらに磁場の非線形性も存在するため、乱流状態はより複雑な物理現象となってくる。MHD乱流場が主な対象となる研究分野は天体物理や核反応関連現象である。近年、MHD乱流場においてその詳細なメカニズムを探索する目的から、ハルトマン流れのような低磁気プラントル数MHD乱流だけでなく、磁場の非線形性が強く作用する高磁気プラントル数のMHDプラズマ場に関しても直接数値計算(DNS)を利用した研究が行われるようになってきた。著者らの研究室でもMHD一様減衰乱流、強制一様等方性乱流や一様剪断乱流において、初期エネルギーの分配、磁気プラントル数、初期クロスヘリシティ、一様印加磁場、系回転などの効果に関して探求してきた。MHD強制一様等方性乱流のDNSによる結果からは低波数帯に速度場のみ線形関係となる外力を導入したケースで定常状態を形成できることが確認された。そこで、本研究ではその結果を利用し、一様磁場を印加してどのようにMHD乱流が変化するかを検討していく。

2. 基礎方程式と数値計算手法

x 方向に一様磁場 B を印加した下での揺動速度 u_i と揺動磁場 b_i に関するMHD基礎方程式は以下である。

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial u_i u_j}{\partial x_j} &= -\frac{\partial p}{\partial x_i} + B \frac{\partial b_i}{\partial x} + \frac{\partial b_j b_i}{\partial x_j} + \nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} + f_i^k & \frac{\partial u_j}{\partial x_j} &= 0 \\ \frac{\partial b_i}{\partial t} + \frac{\partial b_j u_j}{\partial x_j} &= B \frac{\partial u_i}{\partial x} + \frac{\partial u_i b_j}{\partial x_j} + \lambda \frac{\partial^2 b_i}{\partial x_j^2} & \frac{\partial b_j}{\partial x_j} &= 0 \end{aligned}$$

ここで、外力 f_i^k は大きなスケール領域 $0 < k < 4$ において運動および磁気エネルギーの総和である全エネルギーが一定になるように導入した速度に平行な線形外力である。このMHD乱流場における支配パラメータはレイノルズ数 Re 、磁気プラントル数 $Pr_m = \nu/\lambda$ 、一様磁場強度 B である。本研究では Pr_m を1とし、 Re は微分長に基づくレイノルズ数 Re_T 、 Re_{TB} を計算結果から算出する。印加磁場としては $B=0.5$ と1に設定している。計算の初期状態は磁場を印加しない場合での速度に線形な外力を導入して得られたMHD一様等方性乱流場の瞬間場データとし、時刻 $t=0$ において急に磁場を印加して、最終時刻 $t=20$ までのDNSを実行した。

本研究で計算に使用した方法としては、空間離散化にはフーリエ変換をベースとする擬スペクトル法、時間発展には拡散項に2次精度Crank-Nicolson法を、その他の項に2次精度Adams-Bashforth法を採用した。エリアイジングエラーを2/3ルールで除去したため有効解析モード波数は 83^3 であり、対応する実空間格子系は 256^3 である。

3. 計算結果

図1に揺動量の2体平均量である運動エネルギー K 、磁気エネルギー K_B 、クロスヘリシティ H の結果を与える。印加磁場が加わった時刻 $t=0$ の直後に運動エネルギーは急速に減少し、ほぼ磁気エネルギーと同レベルまで変化した後、再び K が上昇し、 K_B が減少している。計算最終時刻においても定常とはいえない状態となっている。印加磁場の大きさによる違いは磁場印加直後の減少において $B=0.5$ の方が変化が緩やかになっている点である。運動エネルギーが増加する時間帯になると両ケースの差異は小さなものとなっており、最終時刻における運動エネルギーと磁気エネルギーの

割合は印加磁場ゼロの場合よりも若干 K が大きくなっている。一方、クロスヘリシティの時間変化は印加磁場がない状態ではほぼゼロであるのに対して、 $B=0.5$ のケースでは緩やかに減少し -0.5 程度で時間的な変化がなくなり、 $B=1$ では緩やかに上昇して 0.15 程度ではほぼ一定値となっている。時刻 $t=20$ でのレイノルズ数は $B=0.5$ では $Re_T=88.3$, $Re_{TB}=25.0$ であり、 $B=1$ では $Re_T=88.2$, $Re_{TB}=21.2$ となった。これは印加磁場ゼロのケースでのレイノルズ数 $Re_T=52.6$, $Re_{TB}=10.3$ に比べてやや大きな値を示す結果となった。

運動エネルギーと磁気エネルギーの輸送方程式は

$$\frac{\partial K}{\partial t} = P_K + M + \Lambda - \varepsilon \quad \frac{\partial K_B}{\partial t} = -M - \Lambda - \varepsilon_B$$

となる。 P_K , P_B は外力による生成項、 ε , ε_B は散逸率、 M と Λ は平均磁場を介したエネルギー交換項と揺動磁場によるエネルギー交換項であり、それらの定義式は以下で与えられる。

$$\begin{aligned} P_K &= \overline{f_i^k u_i} & M &= \overline{B u_j \frac{\partial b_j}{\partial x}} & \Lambda &= \overline{b_i u_j \frac{\partial b_j}{\partial x_i}} \\ \varepsilon &= \nu \overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_i}{\partial x_j}} & \varepsilon_B &= \lambda \overline{\frac{\partial b_i}{\partial x_j} \frac{\partial b_i}{\partial x_j}} \end{aligned}$$

その収支結果を図2に示す。磁場が印加されると M が大きな負値として運動エネルギーから磁気エネルギーへの変換が行われ、時間が経過するとその寄与はゼロ付近で揺らぐものとなっている。同様に作用している負の Λ に比べるとその交換としての働きは弱いものとなっている。散逸項に着目すると磁気散逸率が運動散逸率よりも負で大きく、強く消散させる効果を示している。

運動および磁気エネルギー散逸率の輸送方程式は

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = P_\varepsilon + M_\varepsilon + \Lambda_\varepsilon + D_\varepsilon \quad \frac{\partial \varepsilon_B}{\partial t} = P_{\varepsilon B} - \frac{1}{Pr_m} M_\varepsilon - \frac{1}{Pr_m} \Lambda_\varepsilon + D_{\varepsilon B}$$

となる。 P_ε と $P_{\varepsilon B}$ は生成項、 D_ε と $D_{\varepsilon B}$ は散逸項、 M_ε は印加磁場を介した散逸交換項で、 Λ_ε は揺動場による散逸交換項であり、

$$\begin{aligned} P_\varepsilon &= 2\nu \overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial f_i^k}{\partial x_j}} - 2\nu \overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_i}{\partial x_m} \frac{\partial u_m}{\partial x_j}} + 2\nu \overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial b_i}{\partial x_m} \frac{\partial b_m}{\partial x_j}} \\ P_{\varepsilon B} &= -2\lambda \overline{\frac{\partial b_i}{\partial x_j} \frac{\partial b_i}{\partial x_m} \frac{\partial u_m}{\partial x_j}} + 2\lambda \overline{\frac{\partial b_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_i}{\partial x_m} \frac{\partial b_m}{\partial x_j}} \\ M_\varepsilon &= 2\nu B \overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial^2 b_i}{\partial x_j^2}} & \Lambda_\varepsilon &= 2\nu b_m \overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial^2 b_i}{\partial x_m \partial x_j}} \\ D_\varepsilon &= -2\nu^2 \overline{\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_m} \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_m}} & D_{\varepsilon B} &= -2\lambda^2 \overline{\frac{\partial^2 b_i}{\partial x_j \partial x_m} \frac{\partial^2 b_i}{\partial x_j \partial x_m}} \end{aligned}$$

と定義される。図3は ε の収支の結果である。磁場を印加した直後に急激な変化を示すが、生成項と散逸項の印加磁場の強度による差異は比較的小さなものである。しかし、交換項に着目すると、 $B=0.5$ のケースでは両項ともほぼ同等なゲインとして働いているが、 $B=1$ のケースでは揺動場に関する交換項はロスとして、平均磁場を介した交換項は生成項と同レベルのゲインとして作用している。

図4にレイノルズおよびマクスウェル応力の非等方成分 b_{ii} の時間変化を与える。揺らぎは大きい、時間が経過してくると、印加磁場方向であるレイノルズ応力の11成分は弱

くなり、マクスウェル応力の11成分は大きくなる傾向が確認できる。しかし、その値の大きさから非等方性としてはかなり弱いものとなっている。

最終時刻での全エネルギースペクトル $E_T(k)$ とその中の運動エネルギーの割合の結果を図5に示す。印加磁場の大きさの違いからくる差異は非常に小さく、磁場を印加しないケースの $-5/3$ 乗に沿うスペクトルよりも急激なカスケードを示す結果となった。また、低波数帯の $k=3,4$ では特徴的なかなり大きな運動エネルギー保有を示すが、それ以上の高波数領域では低い運動エネルギー保有となっている。最後に時刻 $t=20$ での速度と磁場のパワースペクトルの非等方成分 $B_{ii}(k)$ の結果を図6に示す。高波数領域での強印加磁場の $B=1$ の結果は速度のパワースペクトル11成分がかなり卓越している様子が確認できる。応力のような平均量とは異なり、一様磁場の印加により、小さなスケールでの非等方分離は顕著なものとなっている。その他の詳細な結果は発表時に譲る。

Figure 1 Kinetic and magnetic energy and cross helicity.

Figure 2 Kinetic and magnetic energy budgets. (a) K , (b) K_B .

Figure 3 Kinetic dissipation budget.

Figure 4 Anisotropic tensor elements of the Reynolds and Maxwell stress.

Figure 5 Total energy spectra $E_T(k)$ and ratio of the kinetic energy spectrum $E(k)$ to $E_T(k)$.

Figure 6 Anisotropy of the kinetic and magnetic power spectra at $t = 20$. (a) $B^K(k)$, (b) $B^B(k)$.