259 可撓性積層はりの大たわみ変形解析

Theoretical Analysis of Large Deformations in a Flexible Multi-Layered Beam

正 大槻 敦巳 (名城大理工) 〇学 林 克典 (名城大理工 院)

Atsumi OHTSUKI, Meijo University, 1-chome 501-banchi, Shiogamaguchi, Tempaku-ku, Nagoya, 468-8502 Japan

Katsunori HAYASHI, Graduate student of Meijo University

Key Words: Elasticity, Large Deflection, Non-linear Problem, Elastica Problem, Multi-Layered Beam

1. 緒言

金属系材料あるいは高分子材料の薄板や細線など極めて大きくたわみやすい材料がばね用部材や機械の構造用部材として広く用いられている。しかも、最近ではこれらは単体としてだけでなく、部材としての機能向上のため積層化して使用されることも多くなっている。可撓性単層はりの大変形については、幾つかの解析例があるが^{(1)~(3)}、積層はりについては不明な点が多い。そこで、本論文では可撓性の大きい積層薄板の大変形特性について、両端回転自由な真直はりが軸方向圧縮荷重を受けた場合を例にとり非線形解析したもので、だ円積分を用いた解析解を与えるとともに、解析理論の有効性を実験で確かめた。ところで、積層はりは均質等方体を組合わせたはりで、負荷の際は相互に滑ることなく一つのはりとして変形し、Euler-Bernoulli の仮定が成り立つものと考えられる。また、理論の適応範囲は弾性領域とし、はりは不伸長で、せん断力の影響、ポアッソン効果などは考慮しないこととした。

2. 基礎理論

図1に示すように、全長 $2L$ の両端回転自由な積層はりは、両端部に軸方向圧縮荷重 P を受ける。はりにおける変形の対称性を考慮して解析は右半分について行う。座標原点を A とし、原点から鉛直下向きに距離 y をとり、水平方向に距離 x をとる。水平方向変位を λ 、垂直方向変位を δ 、先端たわみ角を θ_B 、たわみ曲線の円弧長さを s 、曲率半径を R 、積層はりを構成する各部材要素のヤング率を $E_1 \sim E_n$ 、中立軸に関する各部材要素の断面二次モーメントを $I_1 \sim I_n$ とする。特に、図2は2層薄板($n=2$)を示したもので、 z 軸から中立軸までの距離を $\bar{y}$ 、中立軸から任意軸までの距離を y 、さらに z 軸から任意軸までの距離を y_z とする。曲げ変形において、中立軸から各部材要素までの距離を $y_1 \sim y_n$ とすると、中立軸に対する曲率の関係から

$$\frac{1}{R} = \frac{\sigma_1}{E_1 y_1} = \frac{\sigma_2}{E_2 y_2} = \dots = \frac{\sigma_i}{E_i y_i} = \dots = \frac{\sigma_n}{E_n y_n} \quad \dots\dots\dots (1)$$

また、断面に作用する曲げモーメント M は、 A_i を各部材要素の断面積とすれば、式(1)より

Fig.1 Schematic configuration of multi-layered beam subjected to axial compressive forces at both hinged supports.

$$M = \sum_{i=1}^n \left(\frac{E_i}{R} \int_A y_i^2 dA \right) = \frac{1}{R} \sum_{i=1}^n (E_i I_i) \quad \dots\dots\dots (2)$$

したがって、たわみの関係式として次式(3),(4)が成り立つ。

$$\frac{1}{R} = -\frac{d\theta}{ds} = \frac{M}{\sum_{i=1}^n (E_i I_i)} \quad \dots\dots\dots (3)$$

$$dx = ds \cdot \cos \theta, \quad dy = ds \cdot \sin \theta \quad \dots\dots\dots (4)$$

はりの任意点 $Q(x,y)$ に作用する曲げモーメントは

$$M = P \cdot y + M_A \quad \dots\dots\dots (5)$$

ここで、次の無次元量

$$\left. \begin{aligned} \xi &= \frac{x}{L}, \quad \eta = \frac{y}{L}, \quad \zeta = \frac{s}{L}, \quad \rho = \frac{R}{L} \\ \gamma &= \frac{PL^2}{\sum_{i=1}^n (E_i I_i)}, \quad \alpha = \frac{M_A L}{\sum_{i=1}^n (E_i I_i)} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (6)$$

を導入すれば、最終的に、たわみの基礎式は式(3)~(5)より

$$\frac{d\theta}{d\zeta} = \pm \sqrt{2\gamma(\cos \theta - \cos \theta_B)} \quad \dots\dots\dots (7)$$

なお、式(7)右辺の正負符号($\pm$)は無次元円弧長さ ζ に対する θ の増減特性によって選択されるもので、本解析における変形状態では常に正符号(+)を採用する。

さらに、上式(7)において、新しく角度変数 ϕ 、変数 k

$$\left. \begin{aligned} \cos \theta_B &= 1 - 2k^2 \\ \cos \theta &= 1 - 2k^2 \cdot \sin^2 \phi \quad \left(0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{2} \right) \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (8)$$

とおき、 θ について新角度変数 ϕ に変換し、整理すると

$$d\zeta = \frac{d\phi}{\sqrt{\gamma(1 - k^2 \cdot \sin^2 \phi)}} \quad \dots\dots\dots (9)$$

$$d\eta = \frac{2k \cdot \sin \phi}{\sqrt{\gamma}} d\phi \quad \dots\dots\dots (10)$$

$$d\xi = \left\{ \frac{2}{\sqrt{\gamma}} \sqrt{1 - k^2 \cdot \sin^2 \phi} - \frac{1}{\sqrt{\gamma} \sqrt{1 - k^2 \cdot \sin^2 \phi}} \right\} d\phi \quad \dots\dots\dots (11)$$

これら微少量の式を角度変数 $\phi_A \sim \phi_C$ [実角度 $\theta_A \sim \theta_C$ に対応] にわたって積分すれば、任意点 $Q(x,y)$ までの無次元円弧長さ ζ 、無次元水平距離 ξ 、無次元たわみ η が求まる。

先端 B に関しては、最終的に次式が得られる。

$$\zeta_B = 1 = \frac{1}{\sqrt{\gamma}} F\left(k, \frac{\pi}{2}\right) \quad \dots\dots\dots (12)$$

Fig.2 Illustration of cross-section of two-layered beam.

Fig.3 Relationship between non-dimensional deflection η_B and non-dimensional load γ ($n=2$).

Fig.5 Relationship between deflection angle θ_B and non-dimensional load γ ($n=2$).

Fig.4 Relationship between non-dimensional elongation ξ_B and non-dimensional load γ ($n=2$).

$$\eta_B = \frac{\delta}{L} = \frac{2k}{\sqrt{\gamma}} \left(1 - \cos \frac{\pi}{2} \right) = \frac{2k}{\sqrt{\gamma}} \quad \dots \dots \dots (13)$$

$$\xi_B = \frac{L - \lambda/2}{L} = \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \left\{ 2E \left(k, \frac{\pi}{2} \right) - F \left(k, \frac{\pi}{2} \right) \right\} \quad \dots \dots \dots (14)$$

なお、関数 $F(k, \phi)$, $E(k, \phi)$ はそれぞれ Legendre-Jacobi のだ円積分第一種および第二種を表す。

ところで、積層層が薄板の場合には、任意部材要素の中立軸に関する断面二次モーメント I_i の一般式は

$$I_i = \frac{bh_i^3}{12} + bh_i \left(\bar{y} - \frac{h_i}{2} - \sum_{k=1}^i h_{k-1} \right)^2 \quad (\text{ただし, } h_0=0, i \leq n) \quad \dots \dots (15)$$

で表され、中立軸の位置 $\bar{y}$ は、 i 番目の部材の横断面が z 軸に関して持つ断面一次モーメントを $(S_i)_z$ とすれば

$$\bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^n E_i (S_i)_z}{\sum_{i=1}^n (E_i A_i)} \quad \dots \dots \dots (13)$$

となる。ここで $(S_i)_z$ の一般式は

$$(S_i)_z = \frac{bh_i^2}{2} + bh_i \left(\sum_{k=1}^i h_{k-1} \right) \quad \dots \dots \dots (14)$$

3. 理論解析及び測定例

ステンレス鋼(SUS)の薄板(第1層, 幅 b_1 : 27.0mm, 長さ $2L_1$: 300mm, 厚さ h_1 : 0.100mm, ヤング率 E_1 : 205.6GPa)と高分子材料(PVC)の薄板(第2層, 幅 b_2 : 27.0mm, 長さ $2L_2$: 300mm, 厚さ h_2 : 0.515mm, ヤング率 E_2 : 3.41GPa)から構成される2層薄板の軸圧縮はりにおける大たわみ変形の解析結果をそれぞれ図3(無次元荷重: γ と無次元たわみ: η_B の関係), 図4(無次元荷重: γ と無次元先端水平移動距離: $1-\xi_B$ の関係), 図5(無次元荷重 γ と荷重端のたわみ角度 θ_B の関係)に示す。いずれの図においても、併記した実験結果と解析理論はかなり良い一致性を示した。

4. むすび

本研究の解析の結果、次の諸点が明らかとなった。

- (1) 従来未知であった両端回転自由の軸圧縮積層はり(解析例は2層薄板)の大たわみ変形挙動が予想できる。
- (2) 垂直たわみや水平方向変位は軸圧縮荷重によって曲線的に変化する。
- (3) 無次元荷重は見かけの断面は同じでも、構成する層の断面二次モーメント、ヤング率によって変化する。
- (4) 大たわみ実験による無次元水平距離、無次元たわみなどの実験結果は解析理論とかなり良い一致を示し、導出の大たわみ理論の有効性が確認された。

参考文献

- (1) Barten.H.J., Quart.Appl.Math., 2 (1945), 168-171.
- (2) Bisshop.K.E. & Drucker.D.C., Quart.Appl.Math., 3 (1945), 272-275.
- (3) 大槻, 名城大学理工学部研究報告, 26 (1986), 21-28.