855 三角形フレーム要素による平板の面内応力解析

○学 志村 正芳 (神奈川工大), 正 奥村 秀人 (神奈川工大)

In-plane Stress Analysis of Plates Using Triangular Frame Element

Masayoshi SHIMURA and Hidehito OKUMURA

Kanagawa Institute of Technology, Shimo-ogino, Atugishi, Kanagawa

In this study a new computational method of in-plane stress analysis for plates are developed using triangular frame element with two translational and a rotational displacements degree of freedom at each node. The method consists in replacing a three-node triangular element by three frame elements arranged along three sides of triangle. It's effectiveness is demonstrated through several beam and plate problems.

Key Words : Finite Element Method, Plate, In-plane Deformation

1. 結 言

通常取り扱っている2次元弾性問題では力の作用する場合が多いが, マイクロおよびナノメカニクスの分野における力, モーメントの流れのメカニズムを解明するためにはモーメントの作用を考慮することが必須である。

本研究では3本の二次元フレーム要素を三角形要素の三辺の位置に配置した三角形フレーム要素を開発し, この要素により集中モーメントの作用する二次元連続体の平面応力解析を可能にしたので報告する。

2. 新しい FEM の発想

せん断変形を解析するために開発された文献[1]の要素は, 集中モーメントの作用する問題を取り扱うことを可能とした。しかし, 集中モーメント負荷の問題においては充分とは言えない結果を示している。

本研究では図1(a)の三角形要素の剛性マトリックスと等価な剛性を有する三角形の各辺に位置する図1(b)のトラス要素を考える。ここで, 3本のトラスの断面面積は等しく, 直径dの円形断面とする。

トラスの断面面積を $\bar{S}$ として両者の剛性マトリックスを等置すると次のようになる。

$$[k] + \gamma_a [h_a] = \bar{S} \left([\bar{k}] + \gamma_b [h_b] \right) \quad (1)$$

$$[h_a] = \frac{At}{12} \begin{bmatrix} 20 & 10 & 10 \\ 02 & 01 & 01 \\ 10 & 20 & 10 \\ 01 & 02 & 01 \\ 10 & 10 & 20 \\ 01 & 01 & 02 \end{bmatrix},$$

$$[h_b] = \sum_{e=1}^3 [h_e], \quad [h_e] = \frac{L_e}{6} \begin{bmatrix} 20 & 10 \\ 02 & 01 \\ 10 & 20 \\ 01 & 02 \end{bmatrix} \quad (2)$$

ここで, 両辺の付加項の付いた剛性マトリックスは文献[2~5]により定式化された, 非拘束の境界条件

も含めたすべての境界条件を取り扱うことのできる修正された剛性マトリックスである。左辺の $[h_a]$ は三角形要素の密度1の質量マトリックスに対応し, A は三角形要素の面積, t は板厚である。右辺の $\bar{S}$ はトラス要素の断面面積, $[h_b]$ はトラス要素の密度1の質量マトリックスに対応し, L_e はトラス要素の長さである。

また γ の値も文献[2~5]より次の条件の範囲を用いた。

$$\omega_j \times 10^6 \leq \gamma_j \leq \omega_j \times 10^4, \omega_j = (k_{ii})_{\min} / (h_{ii})_{\max} \quad (j=a,b) \quad (3)$$

$(k_{ii})_{\min}$, $(h_{ii})_{\max}$ はそれぞれマトリックス $[k]$ と $[h_a]$ または $[\bar{k}]$ と $[h_b]$ の対角項の最小値と最大値を表す。また γ の単位は $[N/m^4]$ となり単位体積当たりの剛性(ばね定数)を表す。右辺の剛性マトリックスは3本の二次元トラス要素の剛性マトリックスの和になっている。式(1)の左辺を $[k_a]$, 右辺の括弧内を $[k_s]$ として $[k_s]$ の逆行列を求め, 式(1)の両辺に左から掛けると次式になる。

$$[k_s]^{-1} [k_a] = \bar{S} [I] \quad (4)$$

式(4)の左辺を $[k^*]$ とし, 対角成分を $(k^*)_{ii}$ とすると, 両辺の対角成分により次式が得られる。

$$\bar{S} = \frac{\sum_{i=1}^n k_{ii}^*}{n}, \quad (n=6) \quad (5)$$

さらに式(5)の値から同じ円形断面の断面二次モーメントを求めると次の値が得られる。

$$I_z = \frac{\pi d^4}{64} = \frac{\bar{S}^2}{4\pi} \quad (6)$$

次に図1(b)の3本のトラス要素を同じ形状のフレーム要素に置換すると図1(c)となる。ここで, フレーム要素の断面面積を S_b , 断面二次モーメントを I_b として次式で設定する。

$$S_b = \alpha \bar{S}, \quad I_b = \alpha^2 I_z \quad (7)$$

ただし、係数 α は二次元弾性論の解とFEM解を比較して決定する。

要素のひずみと応力は3本のフレーム要素により形成される三角形の三角形要素と同様に求める。さらにフレーム要素の midpoint で軸力、せん断力、曲げモーメントおよびフレームの外側表面のフレーム要素の中心軸に沿った方向の垂直応力を求める。

Fig.1 Finite Elements
3. 数値解析例

(1)集中荷重を受ける片持ち平板

Fig.2 の片持ち平板の自由端 c の曲げによるたわみ v_b について、二次元弾性論の解とはりのたわみの解は一致し、単純せん断による自由端 c のたわみ v_s を考慮した場合のたわみ v_c は次式となる。

$$v_c = v_b + v_s = \frac{PL_x^3}{3EI_z} + \frac{PL_x}{Gth} \quad (8)$$

$h=500t$ を一定として $L=6h, 8h$, および $10h$ の場合について α の値を代入し、 v_c の FEM 解と式(8)の解を接近させて α の値を決定する。結果を表 1 に示す。

$$h = 1[m], \quad t = 0.002[m], \quad P = 1000[N]$$

Fig.2 Cantilever plate

次に $\alpha=0.79$ として $L=h, 2h, 4h$ の場合について自由端 c のたわみを計算した結果を表 2 に示す。

Table.1 Comparison of deflections at point c

Deflection	L_x		
	6h	8h	10h
v_b	2.160×10^{-3}	5.119×10^{-3}	9.998×10^{-3}
v_s	0.037×10^{-3}	0.050×10^{-3}	0.063×10^{-3}
$v_c = v_b + v_s$	2.197×10^{-3}	5.169×10^{-3}	10.061×10^{-3}
v_{FEM}	2.201×10^{-3}	5.171×10^{-3}	1.006×10^{-2}
α	0.79	0.79	0.79

Table.2 Comparison of deflections at point c

Deflection	L_x		
	h	2h	4h
v_b	9.998×10^{-6}	7.998×10^{-5}	6.399×10^{-4}
v_s	6.250×10^{-6}	1.250×10^{-5}	0.250×10^{-4}
$v_c = v_b + v_s$	16.248×10^{-6}	9.248×10^{-5}	6.649×10^{-4}
α	0.79	0.79	0.79
v_{FEM}	20.21×10^{-6}	9.279×10^{-5}	6.706×10^{-4}

(2)有効面積係数 α と Cr/t の関係

二次元弾性論より解が見出されている問題として自由端に集中荷重を受ける片持ち平板の問題がある。この問題を利用して、三角形要素の内接円の半径 Cr と有効面積係数 α の関係を解析する。

$L_x=10h, h=1[m], P=1000[N]$ として総要素数 320, 総節点数 205 を一定として板厚 t と α を変化させて計算する。 α の決定には自由端 c のたわみ v_c の値について、解析解と FEM 解が 2 桁一致する場合とする。結果は次のようになる。

$$5t \leq Cr < 20t: \alpha = 6.67 \times 10^{-4} \times Cr/t + 0.777, 20t \leq Cr: \alpha = 0.79$$

(3)集中曲げモーメントを受けるはり

図 3 の自由端に集中モーメントを受ける片持ちはりについて FEM 解析する。

Fig.3 Cantilever beam

長さ $L_x=1[m]$, 断面の高さ $h=0.1[m]$, 幅 $t=2[mm]$ の形状を総要素数 320, 総節点数 205 に要素分割し、集中モーメント荷重は $M_0=100[Nm]$ とする。

固定端を原点とするとはりの曲げ理論による一次元の解は次式となる。

$$\text{自由端のたわみ} : v_c = \frac{M_0 L_x^2}{EI} = 1.5 \times 10^{-3} [m]$$

$$\text{自由端のたわみ角} : \theta_c = \frac{M_0 L_x}{EI} = 3 \times 10^{-3} [rad]$$

$$\text{曲げ応力} : \sigma_z = \frac{M_0}{Z} = 30 \times 10^6 [Pa]$$

$$\text{自由端 c 点の鉛直方向変位(FEM)} : v_c = 1.524 \times 10^{-3}$$

$$\text{自由端 c 点のたわみ角(FEM)} : \theta_c = 1.472 \times 10^{-2}$$

$$S_1 \text{ 点の曲げ応力(FEM)} : \sigma_{s1} = 29.4 [MPa]$$

以上のことから FEM の解は妥当な値と言える。

4. 結論と今後の課題

集中モーメントの作用する平面応力問題の一般的な有限要素解析法が確立された。今後動的問題への適用および板シェル、三次元固体への拡張が課題である。

5. 参考文献

- 1) 浅野, 機論, 46-401(昭 55-1), pp. 77-86.
- 2) 奥村, 機構論, No. 99-1 (1999), pp. 97-98.
- 3) 水野, 奥村, 機構論, No. 014-02, (2002), pp. 69-70.
- 4) 奥村, 機構論, No060-3 (2006), pp. 87-88.
- 5) 奥村, 機構論, No060-4 (2006), pp. 31-32.