119 周期セル構造体のマルチスケール解析

Multiscale Analysis of Periodic Cellular Solids

正 大野 信忠 (名古屋大)

Nobutada OHNO, Nagoya University, Chikusa-ku, Nagoya

Keywords: Cellular solids, Honeycombs, Microscopic bifurcation, Multiscale analysis

1. はじめに

ハニカムやフォーム（発泡体）に代表されるセル構造体は、一般に比剛性が高いから、構造材料として注目されている。このような固体は微視構造を陽に有しており、その力学的特性は大変興味深い。このため、セル構造体の力学が、固体力学における最近のトピックスの一つとなっている。

セル構造体に圧縮負荷を与えると、セル壁やセル辺に座屈が生じる。このような座屈は微視的座屈と呼ばれ、これによってセル形状は複雑に変化する。特に六角形ハニカムの面内圧縮では、単軸圧縮と二軸圧縮の場合で異なる微視的座屈モードが現れ⁽¹⁾⁽²⁾、二軸圧縮下での微視的座屈モードは、幾何学的に美しい対称性のゆえに分岐解析の観点から魅力的である。また、弾塑性セル構造体の場合、微視的座屈が巨視的変形の局所化を引き起こすことが実験で観察されており⁽²⁾⁽³⁾、その解析はセル構造体の圧縮強度評価上重要である。

セル構造体は微視構造が周期的である周期固体として見る（あるいは理想化する）ことができるが、微視的座屈が生じると、周期固体としての幾何学的対称性が失われることになり、分岐問題として興味深い。またこの座屈は、巨視的負荷のもとで生じる微視的座屈であるから、巨視的変形と微視的変形という2種類の変形に関係するという点で通常の構造物の座屈問題とは異なる。したがって、周期固体の微視的座屈を解くためには、必然的にマルチスケールでの分岐を議論することとなる。

講演者らは、周期セル構造体の分岐問題を解析するため、更新 Lagrange 形式での均質化理論を構築するとともに分岐条件を導出し、その応用として六角形ハニカムや四角形ハニカムの面内座屈挙動を解析してきた⁽⁴⁾⁻⁽⁸⁾。本講演では、これらの研究成果について紹介することにより、周期セル構造体の微視的座屈の特徴について述べる。

2. 微視的分岐条件⁽⁴⁾⁽⁶⁾

周期的な微視構造を有する無限体 B を考え、その単位セルを Y とする。このような物体に巨視的一様負荷を与えると、その微視的変形は初期には Y 周期性を満足するが、微視的分岐が起きると、 Y 周期性が破れ、周期単位は Y より大きくなる。そこで、 k 個の単位セルからなる周期単位 kY を考え、 kY の現配置に直交座標 x_i ($i=1, 2, 3$) を設ける。

変位速度 $\dot{u}_i$ を巨視的成分 $\dot{u}_i^0$ と微視的成分 $\dot{u}_i^*$ に分離する。すなわち、

$$\dot{u}_i = \dot{u}_i^0 + \dot{u}_i^* \quad (1)$$

ここで $\dot{u}_i^*$ は、上述のような仮定のもとでは、 kY 周期性を満足する。このとき、Hill⁽⁹⁾の提案した仮想仕事式は、有限変形に更新 Lagrange 形式で次式のように拡張される。

$$\langle \dot{\pi}_{ji} \delta \dot{u}_{i,j} \rangle = \dot{I}_{ji} \delta \dot{u}_{i,j}^0 \quad (2)$$

ここで、 $\dot{\pi}_{ji}$ と $\dot{I}_{ji}$ はそれぞれ微視的および巨視的公称応力速度を示し、 $\langle \rangle$ は周期単位 kY に関する体積平均を表す。また、 $\delta \dot{u}_i$ は $\dot{u}_i$ の任意の変分を示し、 $\delta \dot{u}_{i,j}^0 = \langle \delta \dot{u}_{i,j} \rangle$ が成り立つ。なお $(\cdot)_{,i}$ は、 x_i に関する微分を表す。

微視的構成式として次式を考える。

$$\dot{\pi}_{ji} = l_{ijk} \dot{u}_{k,j} \quad (3)$$

上式と式(1)を式(2)に代入すると、巨視的構成式と微視的速度場決定問題がそれぞれ

$$\dot{I}_{ji} = \langle l_{ijk} (\dot{u}_{k,j}^0 + \dot{u}_{k,j}^*) \rangle \quad (4)$$

$$\langle l_{ijk} \dot{u}_{p,q}^* \delta \dot{u}_{i,j}^* \rangle = -\dot{u}_{k,i}^0 \langle l_{ijk} \delta \dot{u}_{i,j}^* \rangle \quad (5)$$

のように導かれる。この結果、微視的分岐問題は

$$\langle l_{ijk} \phi_{k,i}^{(r)} \delta \dot{u}_{i,j}^* \rangle = 0, \quad r=1, 2, \dots, m \quad (6)$$

と定式化される。ここで、 $\phi_{k,i}^{(r)}$ は固有モードを示し、 m は分岐の多重度である。また $\delta \dot{u}_i^*$ は、 kY 周期性を満足する任意の速度場である。式(6)により求められる $\phi_{k,i}^{(r)}$ は、次式のような直交性を満たすことが示される。

$$\langle l_{ijk} \phi_{k,i}^{(r)} \rangle = 0, \quad r=1, 2, \dots, m \quad (7)$$

式(4)と(7)より、 $\phi_{k,i}^{(r)}$ は微視的分岐点での巨視的変化速度に影響を及ぼさないことがわかる。したがって、微視的分岐点での固有モードは巨視的速度と独立に求められるから、比較体の概念⁽¹⁰⁾に基づく弾塑性体の分岐後解析が容易となる。

3. 六角形ハニカムの面内座屈⁽⁴⁾⁻⁽⁶⁾

すでに述べたように、周期構造体に微視的分岐が生じると、対称性が破られるため、単位セルが周期単位でなくなる可能性がある。そこで、複数の単位セルからなるセル集合体 kY に関して周期性が成り立つと仮定し、六角形ハニカムの面内座屈挙動を解析した。六角形ハニカムは、巨視的な面内二軸応力 Σ_{11} , Σ_{22} を受けるとした (図1)。

まず、弾性ハニカムを、セル壁の長さ l , 厚さ h , ヤング率 E , ポアソン比 ν として解析した。この場合は、 2×2 個

Fig. 1. Hexagonal honeycombs subject to in-plane biaxial compression.

Fig. 2. Three eigenmodes of $Y_{2 \times 2}$ of elastic hexagonal honeycombs subject to in-plane equi-biaxial compression.

Fig. 3. Combined eigenmodes of elastic hexagonal honeycombs.

のユニットセルからなる周期単位 $Y_{2 \times 2}$ を考えれば十分であり、等二軸圧縮負荷 ($\Sigma_{11} = \Sigma_{22} < 0$) では 3 重分岐が生じた。このように等二軸圧縮負荷のもとで 3 重分岐が生じるのは、次の理由による。六角形ハニカムは三つのセル壁方向を有しているが、等二軸圧縮負荷では三つのセル壁方向に等しい圧縮荷重がかかる。このため、三つのセル壁方向

Fig. 4. Macroscopic stress-strain relation of an elastoplastic hexagonal honeycomb under in-plane equi-biaxial compression.

Fig. 5. Three long-wave eigenmodes of $Y_{16 \times 16}$ of elastoplastic hexagonal honeycombs subject to in-plane equi-biaxial compression.

Fig. 6. Combined long-wave eigenmodes of elastoplastic hexagonal honeycombs under in-plane equi-biaxial compression.

のそれぞれに同時に微視的座屈が起き得るから、3 重分岐となる。この結果、等二軸圧縮負荷では、三つの独立な微視的座屈モード $\phi^{(90)}$, $\phi^{(-30)}$, $\phi^{(30)}$ が存在することになる (図 2)。これら三つの座屈モードは、各セル壁方向の単軸座屈モードを表す。これらが同時に生じるとして $\phi = \phi^{(90)} + \phi^{(-30)} + \phi^{(30)}$ を求めると、図 3(a) に斜線で示した変形モードとなり、周期配列すれば Papka-Kyriakides⁽²⁾ により観察された花状座屈モードが得られる。また、 $\phi^{(-30)}$ と $\phi^{(30)}$ だけがアクティブになるとすれば、Gibson-Ashby⁽¹⁾ によって報告された二軸圧縮座屈モードとなる [図 3(b)]。なお Saiki ら⁽¹¹⁾ は、花状座屈を群論的分岐理論により詳細に調べている。

次に、弾塑性ハニカムの場合には、第 1 分岐点後に第 2 分

岐が生じたが、第2分岐点は第1分岐点とは異なり周期単位の大きさに依存した。例えば等二軸圧縮変形では、周期単位を $Y_{14 \times 14}$ 以上にとったときに第2分岐が起き、周期単位を $Y_{18 \times 18}$ とした場合はセル壁が初期降伏した直後に第2分岐が生じた(図4)。周期単位を $Y_{16 \times 16}$ とした場合の第2分岐点での三つの基本分岐モード $\phi^{(90)}$, $\phi^{(-30)}$, $\phi^{(30)}$ を図5(a)~(c)に示す。これらは三つのセル壁方向への座屈モードであり、重畳して $\phi = \phi^{(90)} + \phi^{(-30)} + \phi^{(30)}$ を求めたところ図6(a)に示すような分岐モードとなった。この図を見ると、第2分岐点での微視的座屈は巨視的の様に進行せず、巨視的局所化を伴うことがわかる。このような巨視的局所化は、実験でも観察されている⁽²⁾。なお、重畳する際に $\phi^{(30)}$ の符号を変えたところ図6(a)とは異なる分岐モードが得られ[図6(b)], 基本分岐モードの符号に関して非対称であることがわかった。

図5(a)~(c)に示した三つの基本分岐モードの周期長さは、セル数で16である。このように周期長さの長い分岐は長波長分岐と呼ばれ、周期長さの十分に長い長波長分岐は巨視的不安定性の直後に生じることが知られている⁽¹²⁾。ここで巨視的不安定性とは、巨視的な応力増分とひずみ増分の関係に分岐が生じる点である。上述の等二軸圧縮変形の場合、セル壁の初期降伏後に巨視的軟化が生じると同時に巨視的不安定条件が満足され、周期単位 $Y_{18 \times 18}$ による第2分岐点が検出された。このことより、巨視的不安定と長波長の微視的分岐との関係が均質化理論により合理的に解析されることがわかる。

4. 四角形ハニカムの面内座屈⁽⁷⁾⁽⁸⁾

触媒担体として使用される四角形ハニカムは、触媒担体ケース内でかなりの面内圧縮荷重を受けるから、その面内座屈荷重の評価は重要である。

四角形ハニカムの面内座屈挙動を解析するため、図7に示すようなセル集合体 $Y_{2 \times 2}$, $Y_{4 \times 4}$, ... を周期単位にとり解析した。セル壁(長さ l , 厚さ h)は弾性体(ヤング率 E , ポアソン比 ν)とし、四角形ハニカムは巨視的応力 Σ_{11} , Σ_{22} を受けるとした。この結果、微視的分岐は周期単位に著しく依存し、周期単位を大きくとるほど座屈荷重は減少した(図8)。周期単位として $Y_{2 \times 2}$ と $Y_{16 \times 16}$ をとったときの単軸圧縮座屈モードを図9(a), (b)に、また二軸圧縮下での微視的分岐点を図10に示す。図10から、 $Y_{16 \times 16}$ を周期単位に

Fig. 7. Periodic units of square honeycombs.

Fig. 8. Microscopic bifurcation and macroscopic instability points of an elastic square honeycomb under in-plane uniaxial compression.

Fig. 9. Buckling modes of elastic square honeycombs under in-plane uniaxial compression.

Fig. 10. Buckling stresses of elastic square honeycombs subject to in-plane biaxial compression.

とった場合の座屈荷重は $Y_{2 \times 2}$ による座屈荷重(短波長座屈荷重 Σ_{sw})に比べて40%ほど低くなること、また $Y_{16 \times 16}$ による微視的分岐点は巨視的不安定点とほとんど一致することがわかる。つまり、面内圧縮荷重を受ける四角形ハニカムでは、第1分岐点で長波長分岐が生じる。これは、3章で述べた六角形ハニカムの第1分岐点とは異なる特徴で

Fig. 11. Microscopic bifurcation and macroscopic instability points of an elastoplastic square honeycomb under in-plane uniaxial compression.

ある。

四角形ハニカムの面内座屈荷重は、これまで短波長座屈荷重 Σ_{sw} を用いて評価されてきた。しかし上述のように、第1分岐点で長波長分岐が生じ、その分岐荷重 Σ_{LW} は Σ_{sw} より40%ほど低くなる。そこで、巨視的不安定条件を詳細に検討することにより Σ_{LW} を解析的に求めたところ、

$$\Sigma_{LW} = [E/2(1-\nu^2)](h/l)^3 \quad (8)$$

という簡単な公式が導かれ、均質化理論に基づく有限要素解析結果とよく一致した。このように簡単な公式が、均質化理論によるマルチスケール解析の結果として導かれたことは意義深い。

四角形ハニカムのセル壁が弾塑性材料である場合も、微視的分岐は、図11に示すように周期単位に依存した。この解析では、セル壁の初期降伏応力を σ_0 とし、その応力-ひずみ曲線はべき乗則に基づくとした。図11を見ると、 $Y_{2 \times 2}$ と $Y_{16 \times 16}$ による微視的分岐荷重の違いは10%程度であり、弾性の場合に比べて僅かである。したがって、微視的分岐荷重の周期単位依存性は、セル壁の塑性変形により目立たなくなることがわかる。

5. おわりに

本講演では、基本的な周期セル構造体である六角形ハニカムと四角形ハニカムの面内座屈挙動を均質化理論により解析した結果を示した。これらの解析例を紹介することにより、均質化理論に基づくマルチスケール解析法が微視的変形と巨視的変形の関係を議論するために有効であることを述べた。今後このような解析法は、さらに複雑な周期セル構造体・構造物に適用されると期待される。

文 献

- (1) Gibson, L. J. and Ashby, M. F., *Cellular Solids: Structure and Properties*, 2nd ed. (1997), Cambridge University Press.
- (2) Papka, S. D. and Kyriakides, S., Biaxial crushing of honeycombs – Part I: experiments. *Int. J. Solids Struct.*, 36 (1999), 4367-4396.
- (3) Zhu, H. X. and Mills, N. J., The in-plane non-linear compression of regular honeycombs. *Int. J. Solids Struct.*, 37 (2000), 1931-1949.
- (4) Ohno, N., Okumura, D. and Noguchi, H., Microscopic symmetric bifurcation condition of cellular solids based on a homogenization theory of finite deformation. *J. Mech. Phys. Solids*, 50 (2002), 1125-1153.
- (5) Okumura, D., Ohno, N. and Noguchi, H., Post-buckling analysis of elastic honeycombs subject to in-plane biaxial compression. *Int. J. Solids Struct.*, 39 (2002), 3487-3503.
- (6) Okumura, D., Ohno, N. and Noguchi, H., Elastoplastic microscopic bifurcation and post-bifurcation behavior of periodic cellular solids. *J. Mech. Phys. Solids*, 52 (2004), 641-666.
- (7) Ohno, N., Okumura, D. and Niikawa, T., Long-wave buckling of elastic square honeycombs subject to in-plane biaxial compression. *Int. J. Mech. Sci.*, 46 (2004), 1697-1713.
- (8) Erami, K., Ohno, N. and Okumura, D., Long-wave in-plane buckling of elastoplastic square honeycombs. *Int. J. Plasticity*, (submitted).
- (9) Hill, R., The essential structure of constitutive laws for metal composites and polycrystals. *J. Mech. Phys. Solids*, 15 (1967), 79-95.
- (10) Hutchinson, J.W., Post-bifurcation behavior in the plastic range. *J. Mech. Phys. Solids*, 21 (1973), 163-190.
- (11) Saiki, I., Ikeda, K. and Murota, K., Flower patterns appearing on a honeycomb structure and their bifurcation mechanism. *Int. J. Bifurcation Chaos*, 15 (2005), 497-515.
- (12) Geymonat, G., Müller, S. and Triantafyllidis, N., Homogenization of nonlinearly elastic materials, microscopic bifurcation and macroscopic loss of rank-one convexity. *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 122 (1993), 231-290.